Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 21.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

8. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Beweisen Sie Lemma VIII.1.4 der Vorlesung für $m = 1$:

Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, x \in U$ mit $\overline{ax} \subseteq U$. Gilt dann

$$L := \sup_{t\in[0,1]} \big\|\nabla f\big(a + t(x - a)\big)\big\| < \infty,$$

so ist $|f(x) - f(a)| \leq L\|x - a\|$.

LÖSUNG: *Behauptung:* $L := \sup_{t\in[0,1]} \big\|\nabla f\big(a + t(x - a)\big)\big\| < \infty \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq L\|x - a\|$.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $t \in (0, 1)$ mit

$$f(x) - f(a) = \nabla f(a + t(x - a)) \cdot (x - a) = \nabla f(a + t(x - a)) \cdot (x - a).$$

Also gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Voraussetzung

$$|f(x) - f(a)| = |\nabla f(a + t(x - a)) \cdot (x - a)| \leq \|\nabla f(a + t(x - a))\|\|x - a\| \leq L\|x - a\|.$$

□

(T 2)

Wir betrachten wieder die Situation aus Aufgabe (G3) von Blatt 7:

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Außerdem sei f in U stetig differenzierbar und $f'(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar.

Zeigen Sie, dass jedes $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ höchstens endlich viele Urbilder unter f besitzt.

LÖSUNG: *Behauptung:* Jedes $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ hat endlich viele Urbilder.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe ein $y \in f(U)$ mit $y \notin f(\partial U)$ und eine Folge von verschiedenen Urbildern $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$, d.h. es gilt $f(x_n) = y$ und $x_n \notin \partial U$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$.

Da U beschränkt ist, ist $\overline{U}$ kompakt und somit hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine in $\overline{U}$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Da f in $\overline{U}$ stetig ist, gilt dann

$$f(x_0) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = y.$$

Damit kann x_0 nicht in ∂U liegen, denn sonst wäre $y \in f(\partial U)$, es gilt also $x_0 \in U$. Dann ist aber f nach dem Satz über die Umkehrabbildung in einer Umgebung von x_0 umkehrbar, d.h. f muss dort insbesondere injetkiv sein. Das kann aber nicht sein, denn in jeder Umgebung von x_0 liegt ein Folgenglied $x_{n_k} \neq x_0$ für das $f(x_0) = y = f(x_{n_k})$ gilt.

Also ist die Annahme falsch und jedes $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$ besitzt höchstens endlich viele Urbilder.

(T 3)

Die Funktion $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f_1(x, y) = x$, sowie

$$f_2(x,y) = \begin{cases} x^2 + y, & \text{falls } y \le -x^2, \\ -y - \frac{y^2}{x^2}, & \text{falls } -x^2 < y < 0, \\ \frac{y^2}{x^2} - y, & \text{falls } 0 \le y < x^2, \\ y - x^2, & \text{falls } x^2 \le y. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar und $f'(0,0)$ invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass es in jeder Umgebung des Nullpunktes Punkte (x, y) und (w, z) mit $(x, y) \neq (w, z)$ aber $f(x, y) = f(w, z)$ gibt.

(c) Warum ist das kein Widerspruch zum Satz über die Umkehrabbildung?

Hinweis: Man beachte, dass $-f_2(x, y) = f_2(x, -y)$ ist.

LÖSUNG: (a) Da die Funktion f_1 offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\nabla f_1(x, y) = (1, 0)$ ist, wenden wir uns f_2 zu. Weiterhin beobachten wir, dass wir wegen $f_2(x, y) = -f_2(x, -y)$ unsere Betrachtungen nur für $y \ge 0$ anstellen müssen, denn wenn f_2 in einem Punkt (x, y) mit $y > 0$ differenzierbar ist, dann ist $\nabla f_2(x, -y) = (-\partial_1 f_2(x, y), \partial_2 f(x, y))$.

Zunächst bestimmen wir $\nabla f_2(x, y)$ für $y \neq 0$ und $y \neq x^2$. Dann gilt

$$\nabla f_2(x,y) = \begin{cases} (2x, 1) & \text{falls } y < -x^2, \\ \left(\frac{2y^2}{x^3}, -1 - \frac{2y}{x^2}\right), & \text{falls } -x^2 < y < 0, \\ \left(-\frac{2y^2}{x^3}, \frac{2y}{x^2} - 1\right), & \text{falls } 0 < y < x^2, \\ (-2x, 1), & \text{falls } x^2 < y. \end{cases} \tag{1}$$

Dann untersuchen wir f_2 auf partielle Differenzierbarkeit in den Punkten $(x, 0)$ mit $x \neq 0$. Für die Ableitung nach der ersten Koordinaten beobachten wir, dass $f(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, d.h. es gilt

$$\partial_1 f_2(x, 0) = 0.$$

Die partielle Ableitung nach der 2. Koordinaten ergibt sich zu

$$\partial_2 f_2(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(x,t) - f_2(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t + \frac{t}{|t|}\frac{t^2}{x^2}}{t} = -1 + \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{|t|x^2} = -1 + \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{x^2} = -1.$$

Da damit (vgl. 1) $\nabla f_2(x, y)$ in $(x, 0)$ für $x \neq 0$ stetig ist, ist f_2 in diesen Punkten stetig differenzierbar.

Genauso untersuchen wir f_2 auf partielle Differenzierbarkeit in den Punkten (x, x^2) mit $x \neq 0$. Dazu berechnen wir für $t > 0$

$$\frac{f_2(x+t, x^2) - f_2(x, x^2)}{t} = \frac{\frac{x^4}{(x+t)^2} - x^2 - 0}{t} = \frac{-2x^3t - t^2x^4}{t(x+t)^2} = -\frac{2x^3 + tx^4}{(x+t)^2} \xrightarrow{t\to 0} -2x,$$

sowie für $t < 0$

$$\frac{f_2(x+t, x^2) - f_2(x, x^2)}{t} = \frac{x^2 - (x+t)^2 - 0}{t} = -\frac{2xt + t^2}{t} \xrightarrow{t\to 0} -2x.$$

Also gilt

$$\partial_1 f_2(x, x^2) = -2x.$$

Für die partielle Ableitung $\partial_2 f_2(x, x^2)$, $x \neq 0$ berechnen wir analog für $t > 0$:

$$\frac{f_2(x, x^2+t) - f_2(x, x^2)}{t} = \frac{x^2+t-x^2-0}{t} = 1$$

und für $t < 0$:

$$\frac{f_2(x, x^2+t) - f_2(x, x^2)}{t} = \frac{\frac{(x^2+t)^2}{x^2} - (x^2+t) - 0}{t} = \frac{(x^2+t)^2 - x^2(x^2+t)}{tx^2} = \frac{x^2+t}{x^2} \xrightarrow{t\to 0} 1.$$

Also gilt

$$\nabla f_2(x, x^2) = (-2x, 1)$$

und wie man mit (1) leicht sieht, sind die partiellen Ableitungen von f_2 damit in allen Punkten (x, x^2), $x \neq 0$, stetig. Also ist f_2 in all diesen Punkten stetig differenzierbar.

Es bleibt die Differenzierbarkeit in Null zu untersuchen. Wir bestimmen mit den partiellen Ableitungen einen Kandidaten für die Ableitung in Null:

$$\partial_1 f_2(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(t,0) - f_2(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

und

$$\partial_2 f_2(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_2(0,t) - f_2(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0^2-0}{t} = 1.$$

Um nachzuweisen, dass f_2 in Null tatsächlich mit Ableitung $(0,1)$, differenzierbar ist, untersuchen wir

$$r(t_1, t_2) = f_2(t_1, t_2) - f_2(0,0) - (0,1) \cdot (t_1, t_2)^T = f_2(t_1, t_2) - 0 - t_2.$$

Dazu betrachten wir zunächst den Fall $t_2 \geq t_1^2$. Dann gilt

$$\left| \frac{r(t_1,t_2)}{\|t\|_1} \right| = \frac{|t_2 - t_1^2 - t_2|}{|t_1| + |t_2|} \leq \frac{(|t_1| + |t_2|)^2}{|t_1| + |t_2|} = \|t\|_1 \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Ist $-t_1^2 \leq t_2 \leq t_1^2$, so gilt

$$\left| \frac{r(t_1,t_2)}{\|t\|_1} \right| = \frac{\left| \frac{t_2}{|t_2|} \frac{t_2^2}{t_1^2} - t_2 - t_2 \right|}{|t_1| + |t_2|} \leq \frac{\frac{t_2^2}{t_1^2} + 2|t_2|}{|t_1| + |t_2|}$$

Nun ist $t_1^2 \geq |t_2|$, also haben wir $t_2^2/t_1^2 \leq t_2^2/|t_2| = |t_2|$ und wir erhalten

$$\left| \frac{r(t_1,t_2)}{\|t\|_1} \right| \leq \frac{3|t_2|}{|t_1| + |t_2|} \leq \frac{3t_1^2}{|t_1| + |t_2|} \xrightarrow{t\to 0} 0,$$

in gleicher Weise wie oben.

Damit bleibt noch der Fall $t_2 \leq -t_1^2$ zu untersuchen. Dann gilt

$$r(t_1, t_2) = t_1^2 + t_2 - t_2 = t_1^2,$$

wir sind also im gleichen Fahrwasser, wie im ersten Fall.

Damit gilt allgemein

$$\lim_{t\to 0} \frac{r(t)}{\|t\|} = 0,$$

was bedeutet, dass f_2 in Null differenzierbar ist.

Da nun

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(0,0) \\ \nabla f_2(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

offensichtlich invertierbar ist, sind wir mit (a) fertig.

(b) Für jedes $\xi > 0$ gilt

$$f(\xi, \xi^2/3) = \frac{\frac{\xi^4}{9}}{\xi^2} - \frac{\xi^2}{3} = -\frac{2\xi^2}{9} \quad \text{und} \quad f(\xi, 2\xi^2/3) = \frac{\frac{4\xi^2}{9}}{\xi^2} - \frac{2}{3}\xi^2 = -\frac{2\xi^2}{9},$$

Also ist tatsächlich $f(\xi, \xi^2/3) = f(\xi, 2\xi^2/3)$ für jedes $\xi > 0$. Damit ist f in keiner Umgebung des Nullpunktes lokal umkehrbar.

(c) Wir haben keinen Widerspruch zum Satz über die Umkehrabbildung, denn f ist in $(0,0)$ nicht *stetig* differenzierbar. Es ist z.B. für $t > 0$

$$\partial_2 f_2(t, t^2/4) = \frac{\frac{2}{4}t^2}{t^2} - 1 = -\frac{1}{2} \overset{t \to 0}{\not\longrightarrow} 1 = \partial_2 f_2(0,0).$$