**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 14.5.2008

# Analysis II für M, LaG/M, Ph

## 7. Tutorium mit Lösungshinweisen

### (T 1)

Bestimmen Sie drei Zahlen $a, b, c > 0$, deren Summe 60 ist, so dass das Produkt $abc$ maximal ist.

LÖSUNG: Wegen $a+b+c = 60$ haben wir $c = 60 - a - b$. Es genügt also die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(a,b) = ab(60-a-b) = -a^2b - ab^2 + 60ab$$

zu maximieren, wobei $D = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a, b > 0,\ a+b < 60\}$ ist.

Wir bestimmen zunächst die lokalen Maximalstellen. Die kritischen Punkte ergeben sich durch Lösen des Gleichungssystems

$$\partial_1 f(a,b) = -2ab - b^2 + 60b = 0 \quad \text{und} \quad \partial_2 f(a,b) = -a^2 - 2ab + 60a = 0$$

Aus der ersten Gleichung bekommen wir zum einen die nicht zulässige Lösung $b = 0$ und zum anderen den Fall $b = 60 - 2a$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir $-a^2 - 120a + 4a^2 + 60a = 0$, d.h. wieder $a = 0$ oder $3a - 60 = 0$ und somit $a = 20$. Also ist $(20, 20)$ die einzige kritische Stelle innerhalb $D$ mit $f(20,20) = 8000$.

Damit kann es innerhalb $D$ kein lokales Maximum mit einem höheren Funktionswert mehr geben, es könnte höchstens sein, dass die Funktion $f$ in der Nähe des Randes von $D$ noch größere Werte annimmt. Um das auszuschließen, beobachten wir, dass $f$ auf $\overline{D}$ stetig ist und untersuchen $f$ auf

$$\partial D = \{(0,b) \in \mathbb{R}^2 : b \in [0,60]\} \cup \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in [0,60]\} \cup \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \in [0,60],\ a+b = 60\}.$$

Man sieht sofort, dass $f(0,b) = f(a,0) = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^2$ gilt, also bleibt nur der dritte Teil des Randes zu untersuchen. Für $b = 60 - a$ und $a \in [0,60]$ gilt jedoch auch

$$f(a, 60-a) = a(60-a)(60-a-(60-a)) = a(60-a) \cdot 0 = 0.$$

Damit nimmt $f$ in $(20,20)$ sein globales Maximum an und die gesuchten Zahlen lauten

$$a = 20, \quad b = 20, \quad c = 60 - a - b = 20.$$

### (T 2)

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $U$ eine Umgebung von $x_0$ und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Gilt

$$\nabla f(x) \cdot (x - x_0) > 0 \ (< 0) \quad \text{für alle } x \in U \setminus \{x_0\},$$

so hat $f$ an der Stelle $x_0$ ein lokales Minimum (Maximum).

LÖSUNG: *Behauptung:* $f$ hat in $x_0$ ein lokales Minimum (Maximum).

*Beweis:* Da $U$ eine Umgebung von $x_0$ ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Kugel $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$ ist. Für jedes $x \in B_\varepsilon(x_0)$ gilt nun auch $\overline{x_0 x} \subseteq B_\varepsilon(x_0)$. Wir können also für beliebig gegebenes $x \in B_\varepsilon(x_0)$ den Mittelwertsatz VII.2.8 anwenden und erhalten ein $t \in (0,1)$ mit

$$f(x_0) - f(x) = \nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot (x_0 - x).$$

Damit wir die Voraussetzung anwenden können, müssen wir die rechte Seite noch ein bisschen umformen, denn im Argument vom Gradienten muss ja die Zahl stehen, die hinten von $x_0$ abgezogen wird. Wir ergänzen also eine nahrhafte Null:

$$\begin{aligned}
&f(x_0) - f(x) \\
=&\nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot \big(x_0 - (tx_0 + (1-t)x)\big) + \nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot \big(tx_0 + (1-t)x - x\big) \\
=&-\nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot \big(tx_0 + (1-t)x - x_0\big) + \nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot (tx_0 - tx) \\
=&-\nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot \big(tx_0 + (1-t)x - x_0\big) - \frac{t}{1-t}\nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot \big((t-1)(x_0 - x)\big) \\
=&-\nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot \big(tx_0 + (1-t)x - x_0\big) - \frac{t}{1-t}\nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot \big(tx_0 + (1-t)x - x_0\big) \\
=&-\frac{1+t}{1-t}\nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot \big(tx_0 + (1-t)x - x_0\big).
\end{aligned}$$

Nun ist nach Voraussetzung der Ausdruck $\nabla f(tx_0 + (1-t)x) \cdot (tx_0 + (1-t)x - x_0) > 0$ ($< 0$) und damit gilt, da $(1+t)/(1-t) > 0$ ist,

$$f(x_0) - f(x) < 0 \ (> 0), \quad \text{d.h.} \quad f(x_0) < f(x) \ (f(x_0) > f(x)).$$

Da dies für alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$ gilt, folgt daraus die Behauptung. □

### (T 3)

Das Enterprise-Außenteam ist in seinem Shuttle in eine Subraum-Gravitationsanomalie geraten. Diese füllt die Menge

$$S := \left\{ (x \ \ y \ \ z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \leq f(x,y) \right\},$$

wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := x^2 + y^2 + 2$ gegeben ist. Das Shuttle befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt $(0,0,0)$ und Data hat herausgefunden, dass sie sich mit einem Triebwerkstoß, der allerdings alle Antriebsvorräte verbraucht (irgendwo muss ja die Spannung herkommen) befreien können. Sie werden dann durch die Anomalie auf einen Weg entlang der Kurve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(t) := \frac{1}{10} \begin{pmatrix} t \cdot \sin(t\pi) \\ t \cdot \cos(t\pi) \\ 3t \end{pmatrix}$$

gezwungen. Bestimmen Sie die Zeit $t_0$, die das Shuttle braucht, um in den freien Raum außerhalb von $S$ vorzudringen.

Danach kann es ja nicht mehr manövrieren, sondern fliegt einfach mit seiner momentanen Geschwindigkeit in der momentanen Richtung weiter. Wie lange hat die Enterprise Zeit das Shuttle hochzubeamen bevor es wieder in der Anomalie verschwindet?

LÖSUNG: Zur Bestimmung von $t_0$ suchen wir den ersten Zeitpunkt für den $g(t)$ auf dem Rand von $S$ liegt. Es muss also die $z$-Komponente von $g(t_0)$ gleich der $x$-Konpomente zum Quadrat plus der $y$-Komponente zum Quadrat plus 2 sein. Also

$$\frac{3}{10}t_0 = \frac{t_0^2}{100}\sin^2(t_0\pi) + \frac{t_0^2}{100}\cos^2(t_0\pi) + 2 = \frac{t_0^2}{100}\big(\sin^2(t_0\pi) + \cos^2(t_0\pi)\big) + 2 = \frac{t_0^2}{100} + 2.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $t_0^2 - 30t_0 + 200 = 0$ ist, und wir erhalten als Lösungen der quadratischen Gleichung $t_1 = 10$ und $t_2 = 20$, womit $t_0 = 10$ ist.

Zur weiteren Berechnung der nun geradlinigen Flugbahn benötigen wir den aktuellen Gewschwindigkeitsvektor des Shuttles zum Zeitpunkt $t_0 = 10$. Dieser ist durch die Ableitung

$$g'(t_0) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \sin(t_0\pi) + t_0\pi\cos(t_0\pi) \\ \cos(t_0\pi) - t_0\pi\sin(t_0\pi) \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 + 10\pi \cdot 1 \\ 1 - 10\pi \cdot 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

gegeben. Das Shuttle befindet sich also zum Zeitpunkt $t_0 = 10$ im Punkt

$$g(10) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und fliegt danach geradlinig mit Geschwindigkeit $(\pi, 1/10, 3/10)^T$ weiter. Es befindet sich damit zum Zeitpunkt $t_0 + t$ im Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist also das $t_1 > 0$, für das das Shuttle wieder auf dem Rand von $S$ ist, d.h. für das gilt:

$$\begin{aligned} 3 + \frac{3}{10}t_1 &= t_1^2\pi^2 + (1 + \frac{t_1}{10})^2 + 2 \\ \iff 1 + \frac{3}{10}t_1 &= t_1^2\pi^2 + 1 + \frac{t_1}{5} + \frac{t_1}{100} \\ \iff \frac{1}{10}t_1 &= t_1^2\frac{100\pi^2 + 1}{100} \end{aligned}$$

Neben der logischen aber uninteressanten Lösung $t_1 = 0$ bekommen wir die zweite Lösung

$$t_1 = \frac{10}{100\pi^2 + 1} \approx 0,01.$$

Es wird also tatsächlich eine spannende Folge...