Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 7.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

6. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sin(x\mathrm{e}^y)$. Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades mit Entwicklungspunkt $(0, 0)$. Konvergiert für $(x, y) \to (0, 0)$

$$\frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{\|(x, y)\|_2^3}?$$

LÖSUNG: Mit der Potenzreihenentwicklung der Sinus und der Exponentialfunktion folgt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \right)^{2k+1} \\ &= x(1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots) - \frac{1}{3!}(1 + y + \dots) \pm \dots \\ &= (x + xy + \frac{xy^2}{2} + \dots) - \frac{1}{3!} x^3 (1 + y + \dots) \pm \dots \end{aligned}$$

Die Terme bis zum Grad 2 sind also x und xy und damit ist das Taylorpolynom 2-ten Grades gegeben durch $T_2 f(x, y) = x + xy$.

Der gefragte Grenzwert existiert nicht, denn betrachte $(t, 0) \to (0, 0)$ (für $t \to 0$). Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sin t - t}{|t|^3} &= \frac{-\frac{1}{3!}t^3 + \frac{t^5}{5!} + \dots}{|t|^3} \\ &\to \begin{cases} -\frac{1}{6} & \text{falls } t \to 0 \text{ von rechts} \\ \frac{1}{6} & \text{falls } t \to 0 \text{ von links} \end{cases} \end{aligned}$$

(T 2)

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f \colon (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

im Punkt $(1, 1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

LÖSUNG: Es gilt $f(x, y) = \frac{x+y-2y}{x+y} = 1 - 2\frac{y}{x+y}$ sowie $f(x, y) = \frac{2x-(x+y)}{x+y} = 2\frac{x}{x+y} - 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} D^{(1,0)} f(x,y) &= \partial_x f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2} \\ D^{(0,1)} f(x,y) &= \partial_y f(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2} \\ D^{(2,0)} f(x,y) &= \partial_x^2 f(x,y) = \frac{-4y}{(x+y)^3} \\ D^{(0,2)} f(x,y) &= \partial_y^2 f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3} \\ D^{(1,1)} f(x,y) &= \partial_x \partial_y f(x,y) = \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{4y}{(x+y)^3} = (2x - 2y)/(x+y)^3. \end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt $(1,1)$ erhalten wir somit:

$$f(1,1)=0,\quad D^{(1,0)}f(1,1)=\frac{1}{2},\quad D^{(0,1)}f(1,1)=-\frac{1}{2}$$

$$D^{(2,0)}f(1,1)=-\frac{1}{2},\quad D^{(0,2)}f(1,1)=\frac{1}{2},\quad D^{(1,1)}f(1,1)=0.$$

Die Glieder der Taylorreihe bis zur 2. Ordnung sind:

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(1,1)((x_1,x_2)-(1,1))^{\alpha}\\
=\;& f(1,1)+D^{(1,0)}f(1,1)(x_1-1)+D^{(0,1)}f(1,1)(x_2-1)\\
&+D^{(1,1)}f(1,1)(x_1-1)(x_2-1)+\frac{1}{2}D^{(2,0)}f(1,1)(x_1-1)^2\\
&+\frac{1}{2}D^{(0,2)}f(1,1)(x_2-1)^2\\
=\;& \frac{1}{2}(x_1-1)-\frac{1}{2}(x_2-1)-\frac{1}{4}(x_1-1)^2+\frac{1}{4}(x_2-1)^2.
\end{aligned}$$

(T 3)

Es sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine streng konvexe Funktion. (D.h. $f((1-t)x+ty)<(1-t)f(x)+tf(y)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$.)

Zeigen Sie, dass f höchstens eine lokale Minimalstelle und keine lokalen Maxima besitzt. Zeigen Sie weiter, dass die Mengen $K_c:=\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)<c\}$ konvex sind.

LÖSUNG: Wir nehmen an, es gäbe zwei Minimalstellen x und y. O.B.d.A nehmen wir $f(x)\le f(y)$ an. Also gilt auch für $t\in[0,1]$, dass $f((1-t)x+ty)<(1-t)f(x)+tf(y)\le f(y)$. Da y eine lokale Minimalstelle ist, können wir $t\in(0,1)$ so wählen, dass $f((1-t)x+ty)\ge f(y)$ gilt. Damit folgt aber $f(y)\le f((1-t)x+ty)<f(y)$ ein Widerspruch.

Angenommen f habe ein lokales Maximum x, dann gibt es ein $r>0$, so dass $f(x)\le f(y)$ für alle $y\in B(x,r)$. Damit folgt aber für $\frac{r}{2}e_i+x$ und $x-\frac{r}{2}e_i$, wobei wir einen Einheitsvektor e_i gewählt haben, dass

$$f(x)<\frac{1}{2}f(\frac{r}{2}e_i+x)+\frac{1}{2}f(x-\frac{r}{2}e_i)\le f(x)$$

was wiederum einen Widerspruch liefert.

Für die Konvexität von K_c seien $x,y\in K_c$, d.h. $f(x)<c$ und $f(y)<c$. Dann folgt mit der Konvexität von f, dass

$$f((1-t)x+ty)<(1-t)f(x)+tf(y)<(1-t)c+tc=c$$

für $t\in[0,1]$. Das heißt aber $(1-t)x+ty\in K_c$ für $t\in[0,1]$.