Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008 30.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

5. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\partial_1 f(x, y) = xy \quad \text{und} \quad \partial_2 f(x, y) = y^2 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

LÖSUNG: *Behauptung:* Es gibt *keine* differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den geforderten ersten Ableitungen.

Beweis: Gäbe es eine solche Funktion, so wären die ersten partiellen Ableitungen offensichtlich auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig und ebenso die zweiten. Wir hätten also $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Außerdem wäre

$$\partial_2 \partial_1 f(x, y) = x \neq 0 = \partial_1 \partial_2 f(x, y),$$

was dem Satz von Schwarz widerspricht. □

(T 2)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt *positiv homogen* vom *Grade* $\alpha \in \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $t > 0$ gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und homogen vom Grade α, so gilt die *Eulersche Relation*

$$(\operatorname{grad} f(x) \mid x) = \alpha f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

LÖSUNG:

Behauptung: f positiv homogen vom Grade $\alpha \Rightarrow (\operatorname{grad} f(x)|x) = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\phi(t) := f(tx)$. Dann gilt wegen $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für die Ableitung

$$\phi'(t) = \alpha t^{\alpha - 1} f(x)$$

und

$$\phi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx) = (\nabla f)(tx) \cdot x. \tag{1}$$

Somit ergibt sich

$$((\nabla f)(tx)|tx) = t\phi'(t) = \alpha t^\alpha f(x) = \alpha f(tx), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Die Wahl $t = 1$ liefert die Behauptung. □

(T 3)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie

(a) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(b) Die partiellen Ableitungen $\partial_1\partial_2 f$ und $\partial_2\partial_1 f$ existieren auf ganz $\mathbb{R}^2$, sind im Nullpunkt aber verschieden.

LÖSUNG: (a) Wir zeigen, dass die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind. Dann folgt die stetige Differenzierbarkeit von f aus Satz VII.1.11.

Sei zunächst $(x,y) \neq (0,0)$. Dann ist mit $f(x,y) = (x^3y - xy^3)/(x^2+y^2)$

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - 2y(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Diese partiellen Ableitungen sind offensichtlich für alle $(x,y) \neq (0,0)$ stetig. Wir untersuchen also noch die Lage im Nullpunkt.

Dort gilt

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

und

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Es bleibt die Stetigkeit von $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ in $(0,0)$ nachzuweisen.

Dazu sei $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n,y_n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir weiter $m_n := \max\{|x_n|, |y_n|\}$. Dann ist natürlich $|x_n| \leq m_n$ und $|y_n| \leq m_n$, aber außerdem haben wir noch $\lim_{n\to\infty} m_n = 0$ und $x_n^2 + y_n^2 \geq m_n^2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |\partial_1 f(x_n,y_n)| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_n^4 y_n + 4x_n^2 y_n^3 - y_n^5}{(x_n^2+y_n^2)^2} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^4|y_n| + 4x_n^2|y_n|^3 + |y_n|^5}{(x_n^2+y_n^2)^2} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{m_n^5 + m_n^5 + m_n^5}{m_n^4} = \lim_{n\to\infty} 3m_n = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_1 f(x,y) = 0 = \partial_1 f(0,0)$, was die gesuchte Stetigkeit impliziert.

Komplett analog erhält man

$$\lim_{n\to\infty} |\partial_2 f(x_n,y_n)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_n^5 - 4x_n^3 y_n^2 - x_n y_n^4}{(x_n^2+y_n^2)^2} \right| \leq \lim_{n\to\infty} 3m_n = 0.$$

Damit ist auch $\partial_2 f$ in $(0,0)$ stetig und es gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(b) Es gilt

$$\partial_2\partial_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(0,t) - \partial_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{t^5}{t^4}}{t} = \lim_{t\to 0} -1 = -1$$

und

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(t,0) - \partial_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^5}{t^4}}{t} = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

Somit existieren $\partial_1\partial_2 f$ und $\partial_2\partial_1 f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ (in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sind $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ offensichtlich differenzierbar), sind aber in $(0,0)$ verschieden.