Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 23.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

4. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie zu gegebenem $x_0 \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und eine Funktion ϕ mit $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \phi(h)$ und $\lim_{h\to 0} \frac{\phi(h)}{|h|} = 0$.

(b) Behandeln Sie die selbe Aufgabenstellung für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Lösung: (a) Wir beobachten

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \begin{pmatrix} (x_0 + h)^2 \\ x_0 + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2 + 2x_0 h + h^2 \\ x_0 + h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0^2 \\ x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 1 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= f(x_0) + \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 1 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wählen wir also $A = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\phi(h) = \begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann haben wir wegen

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|}\phi(h) = \lim_{h\to 0} \begin{pmatrix} |h| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein A mit den geforderten Eigenschaften gefunden.

(b) Genau so rechnen wir für $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}) \in \mathbb{R}^2$ und $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f\left(\begin{pmatrix} x_{0,1} + h_1 \\ x_{0,2} + h_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= x_{0,1}^2 + 2x_{0,1}h_1 + h_1^2 + x_{0,2}^2 + 2x_{0,2}h_2 + h_2^2 \\ &= x_{0,1}^2 + x_{0,2}^2 + (2x_{0,1}, 2x_{0,2}) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + h_1^2 + h_2^2 \\ &= f(x_0) + (2x_{0,1}, 2x_{0,2}) \cdot h + \|h\|_2^2. \end{aligned}$$

Wir wählen daher $A = (2x_{0,1}, 2x_{0,2}) = 2x_0^T$ und $\phi(h) = \|h\|_2^2$, dann sind wir wegen

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{1}{\|h\|_2}\phi(h) = \lim_{h\to(0,0)} \|h\|_2 = (0, 0)$$

fertig.

(T 2)

Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2.$$

Es seien nun $t \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^2$ fest gewählt. Entscheiden Sie von jedem der folgenden Ausdrücke, ob er Sinn macht und was für ein Gebilde (Skalar, Vektor, Matrix, ...) er ist. Berechnen Sie ihn dann im konkreten Beispiel, sofern er sinnvoll ist.

a) $f(t)$	b) $g(x)$	c) $f(x)$	d) $g(t)$
e) $g(f(t))$	f) $f(g(x))$	g) $Dg(x)$	h) $Dg(t)$
i) $Df(t)$	j) $Dg(x) \cdot y$	k) $D(f+g)(x)$	l) $D(f \circ g)(x)$
m) $D(g \circ f)(t)$	n) $D(f \circ g)(x) \cdot y$	o) $D(f \circ g)(y) \cdot x$	p) $D(f \circ g)(x) \cdot t$
q) $Df(g(x)) \cdot Dg(x)$	r) $Df(g(t)) \cdot Dg(t)$	s) $Dg(f(t)) \cdot Df(t)$	

LÖSUNG: (a) $\mathbb{R}^2$-Spaltenvektor,

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}$$

(b) reelle Zahl, $g(x) = x_1^2 + x_2$

(c) sinnlos

(d) sinnlos

(e) reelle Zahl, $g(f(t)) = g(t, 2t+1) = t^2 + 2t + 1$

(f) $\mathbb{R}^2$-Spaltenvektor,

$$f(g(x)) = f(x_1^2 + x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ 2x_1^2 + 2x_2 + 1 \end{pmatrix}$$

(g) $\mathbb{R}^2$-Zeilenvektor, $Dg(x) = (D_1 g(x), D_2 g(x)) = (2x_1, 1)$

(h) sinnlos

(i) $\mathbb{R}^2$-Spaltenvektor,

$$Df(t) = \begin{pmatrix} Df_1(t) \\ Df_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(j) reelle Zahl,

$$Dg(x) \cdot y = (2x_1, 1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1 y_1 + y_2$$

(k) sinnlos

(l) $\mathbb{R}^{2\times 2}$-Matrix,

$$D(f \circ g)(x) = D \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ 2x_1^2 + 2x_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ 4x_1 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei wir für die erste Gleichheit Aufgabenteil (f) verwendet haben

(m) reelle Zahl, $D(g \circ f)(t) = D(t^2 + 2t + 1) = 2t + 1$, unter Verwendung von Aufgabenteil (e)

(n) $\mathbb{R}^2$-Spaltenvektor, unter Benutzung von Aufgabenteil (l) gilt

$$D(f \circ g)(x) \cdot y = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ 4x_1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 y_1 + y_2 \\ 4x_1 y_1 + 2y_2 \end{pmatrix}$$

(o) $\mathbb{R}^2$-Spaltenvektor, unter Anwendung von Aufgabenteil (n) ergibt sich

$$D(f\circ g)(y)\cdot x = \begin{pmatrix} 2x_1y_1 + x_2 \\ 4x_1y_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

(p) $\mathbb{R}^{2\times 2}$-Matrix, unter Verwendung von Aufgabenteil (l) folgt

$$D(f\circ g)(x)\cdot t = t\cdot \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ 4x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

(q) $\mathbb{R}^{2\times 2}$-Matrix, unter Verwendung der Aufgabenteile (i) und (g) erhalten wir

$$Df(g(x))\cdot Dg(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} Dg(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (2x_1, 1) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ 4x_1 & 2 \end{pmatrix};$$

nach Kettenregel entspricht das dem Ergebnis aus (p).

(r) sinnlos

(s) reelle Zahl, wir benutzen nacheinander die Aufgabenteile (g) und (i) und verbleiben mit

$$\begin{aligned} Dg(f(t))\cdot Df(t) &= (2f_1(t), 1)\cdot Df(t) \\ &= (2f_1(t), 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2f_1(t) + 2 = 2t + 2, \end{aligned}$$

was dem Resultat aus Aufgabenteil (m) nach Kettenregel entspricht.

(T 3)

Beweisen Sie Korollar VII.2.5 der Vorlesung:

Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, sowie $f = (f_1, \dots, f_m) : J \to V$ und $g : V \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Dann ist $g\circ f : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x_0 \in J^\circ$

$$(g\circ f)'(x_0) = D(g\circ f)(x_0) = \big(\operatorname{grad} g(f(x_0)) \mid f'(x_0)\big) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x_0))f_j'(x_0).$$

Lösung: Da f und g differenzierbare Funktionen sind und $f(J) \subseteq V$ gilt, haben wir mit der Kettenregel für alle $x_0 \in J^\circ$ die Identität

$$D(g\circ f)(x_0) = Dg\left(f(x_0)\right)\cdot Df(x_0).$$

Nun ist g skalarwertig und f auf $\mathbb{R}$ definiert. Es gilt also für alle $x_0 \in J^\circ$

$$\begin{aligned} D(g\circ f)(x_0) &= \nabla g\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(f(x_0)), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(x_0))\right)\cdot \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j}\left(f(x_0)\right)\cdot f_j'(x_0). \end{aligned}$$