Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 16.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

3. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n, \mathbb{R})$ der orthogonalen $n \times n$-Matrizen als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ eine kompakte Menge ist.

LÖSUNG: Wir benutzen den Satz von Heine-Borel und zeigen, dass die Menge der orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n^2}$ abgeschlossen und beschränkt ist.

Abgeschlossenheit:

Es sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $O(n, \mathbb{R})$ mit Grenzwert O. Da damit alle Koordinaten von O_n konvergieren und die Matrixmultiplikation stetig ist (warum?), folgt

$$O^T O = (\lim_{n\to\infty} O_n^T)(\lim_{n\to\infty} O_n) = \lim_{n\to\infty} O_n^T O_n = Id$$

und damit ist O ebenfalls orthogonal.

Beschränktheit:

Wir zeigen Beschränktheit bzgl. der Zeilensummennorm (Beispiel 2.8). Mit der Äquivalenz der $\|\cdot\|_1$- und der $\|\cdot\|_2$-Norm in $\mathbb{R}^n$ folgt, da die Zeilen o_j, $j = 1, \ldots, n$ einer orthogonalen Matrix O eine ONB bilden, dass

$$\|O\| = \max_{j=1,\ldots,n} \{\|o_j\|_1\} \leq C \max_{j=1,\ldots,n} \{\|o_j\|_2\} \leq C \cdot 1.$$

Dies zeigt die Beschränktheit von $O(n, \mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^{n^2}$, da in $\mathbb{R}^{n^2}$ alle Normen äquivalent sind.

(T 2)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt *quadrat-summierbar*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert. Wir setzen

$$\ell^2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ quadrat-summierbar}\}$$

(a) Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus ℓ^2 sind, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|a\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}, \quad a \in \ell^2$$

eine Norm auf ℓ^2 definiert.

(c) Zeigen Sie, dass ℓ^2, versehen mit $\|\cdot\|_2$ ein Banachraum ist.

LÖSUNG: 1. Die Hölder Ungleichung (Korollar IV.2.16 aus Analysis I) zeigt, dass

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{m} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{m} |b_n|^2\right)^{1/2}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{C}^m$. Also folgt

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2},$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle quadrat-summierbaren Folgen a und b. Mit dem Übergang zum Grenzwert $m \to \infty$ folgt aus den Eigenschaften des Grenzwerts

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

2. Auf dem letzten Übungsblatt wurde die Dreiecksungleichung für die p-Norm in $\mathbb{R}^m$ gezeigt. D.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $a, b \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |a_n + b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{m} |a_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{m} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

Die Argumentation lässt sich einfach auf $a, b \in \mathbb{C}^m$ übertragen. Also gilt

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |a_n + b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2}$$

für $m \in \mathbb{N}$ und alle quadrat-summierbaren Folgen a und b. Mit Grenzwertbildung wie oben folgt

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2},$$

und damit

$$\|a + b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2. \tag{1}$$

Sind also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quadrat-summierbar, dann ist auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quadrat-summierbar. Die übrigen Vektorraum-Axiome folgen sehr einfach. Der Raum ℓ^2 ist also ein Vektorraum.

Die Normeigenschaften von $\|\cdot\|_2$ zeigen wir wie folgt:

Definitheit: Es gilt

$$\|a\|_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}(|a_n| = 0).$$

Homogenität folgt, da für $a \in \ell^2$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda a\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^2 |a_n|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \cdot \|a\|_2.$$

Die Dreiecksungleichung wurde bereits in (1) gezeigt. Also ist $\|\cdot\|_2$ eine Norm.

3. Wir brauchen nur noch die Vollständigkeit zu zeigen. Es sei $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in ℓ^2. (a^n bezeichnet hier nicht die Potenz sondern das n-te Folgeglied!) Wir bezeichnen weiter $a^n = (a_1^n, a_2^n, \ldots)$. Es sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für $m, n \geq N$

$$\|a^n - a^m\|_2 < \varepsilon$$

gilt. Also folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^n - a_i^m|^2 < \varepsilon^2, \tag{2}$$

und damit

$$|a_i^n - a_i^m| < \varepsilon \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(a_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ also in $\mathbb{C}$, etwa gegen $a_i \in \mathbb{C}$. Wir setzen $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und zeigen $a \in \ell^2$. Für $M \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{M} |a_i^n|^2 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|_2^2 < C < \infty$$

für eine Konstante $C > 0$, da Cauchyfolgen beschränkt sind. Also gilt $a \in \ell^2$. Die Konvergenz $a^n \to a$ in ℓ^2 folgt mit (2), da für jedes $M \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{M} |a_i^n - a_i^m|^2 < \varepsilon^2,$$

falls $m, n \geq N$. lassen wir $m \to \infty$, so folgt

$$\sum_{i=1}^{M} |a_i^n - a_i|^2 \leq \varepsilon^2,$$

und $M \to \infty$ ergibt schließlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^n - a_i|^2 \leq \varepsilon^2,$$

was nicht anderes als $\|a^n - a\|_2 \leq \varepsilon$ heißt. Also konvergiert $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(T 3)

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Funktion, so dass T^N für ein $N \in \mathbb{N}$ eine strikte Kontraktion ist. Beweisen Sie, dass T genau einen Fixpunkt besitzt.

LÖSUNG: Wir wenden zunächst den Banachschen Fixpunktsatz auf $S = T^N$ an und erhalten einen eindeutigen Fixpunkt x von T^N. Insbesondere gilt

$$T^N(T(x)) = T^{N+1}(x) = T(T^N(x)) = T(x),$$

und damit ist $T(x)$ ebenfalls ein Fixpunkt von T^N. Da der Fixpunkt von T^N eindeutig bestimmt ist, muss auch $T(x) = x$ gelten. Damit ist x auch Fixpunkt von T.

Die Eindeutigkeit des Fixpukts von T zeigen wir wie folgt: Angenommen für $y \in X$ gilt $T(y) = y$, dann gilt auch $T^N(y) = y$, also ist y auch Fixpunkt von T^N was $y = x$ impliziert.