Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 9.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

2. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Man wähle in $M := \mathbb{R}^2$ einen festen Punkt x_0 und nenne ihn Paris. Definiere $d(x,y)$ für $x, y \in \mathbb{R}^2$ folgendermaßen: $d(x,y)$ sei der euklidische Abstand zwischen x und y, falls x und y auf einer Geraden durch x_0 liegen; andernfalls sei $d(x,y)$ die Summe der euklidischen Abstände zwischen x, x_0 und y, x_0. Man nennt d die *Metrik des französischen Eisenbahnsystems.*

(a) Zeigen Sie, dass dadurch eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(b) Skizzieren Sie für $x_0 = (0,0)$ jeweils die Kugeln mit Radius 1 um die Punkte $(0,3)$, $(0,0)$ und $(0, \frac{1}{2})$.

(c) Zeigen Sie, dass es keine Norm gibt, die die Metrik d induziert.

LÖSUNG: (a) Wir bezeichnen im folgenden mit $|\cdot|$ die euklidsche Norm in $\mathbb{R}^2$. Da $d(x,y) \geq |x-y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt, ist klar, dass $d(x,y) = 0 \iff x = y$ gilt. Die Symmetrie ist ebenfalls klar. Zum Beweis der Dreiecksungleichung setzen wir

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \text{ Es gibt eine Gerade durch } x_0, \text{ auf der } x \text{ und } y \text{ liegen}\}.$$

Es seien nun $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wir unterscheiden 5 Fälle:

1. $(x,z) \in G$ und $(x,y) \in G$.

   Dann gilt $(y,z) \in G$ und $d(x,z) = |x-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$

2. $(x,z) \in G$ und $(x,y) \notin G$.

   Dann ist $(y,z) \notin G$, also $d(x,z) = |x-z| \leq |x-x_0| + |x_0-z| \leq |x-x_0| + |y-x_0| + |x_0-z| + |y-x-0| = d(x,y) + d(y,z)$.

3. $(x,z) \notin G$ und $(x,y) \in G$.

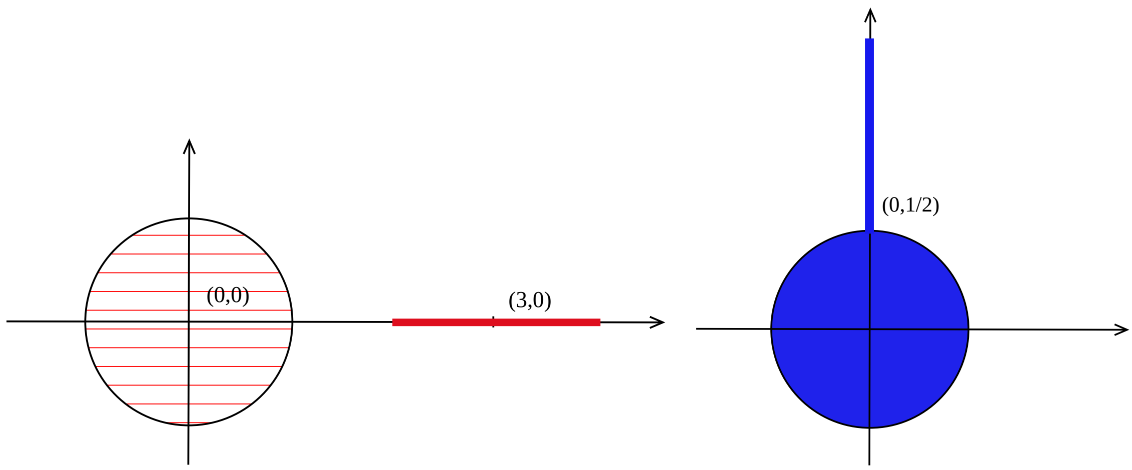
   Dann ist $(y,z) \notin G$, also $d(x,z) = |x-x_0| + |z-x_0| \leq |x-y| + |y-x_0| + |z-x_0| = d(x,y) + d(y,z)$.

4. $(x,z) \notin G$ und $(y,z) \in G$.

   Dann gilt $(x, y \notin G$ und $d(x,z) = |x-x_0| + x_0 - z| \leq |x-x_0| + |y-z| + |x_0-y| = d(x,y) + d(y,z)$.

5. $(x,z) \notin G$, $(y,z) \notin G$ und $(x,y) \notin G$.

   Dann gilt $d(x,z) = |x-x_0| + |z-x_0| \leq d(x,y) + d(y,z)$.



(b)

(c) Da die „Kugel“ um den Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nicht konvex ist, kann diese Metrik nicht von einer Norm induziert werden. Vgl. Gruppenübung.

(T 2)

Es seien X, Y ein normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass T stetig ist, falls T für ein $x_0 \in X$ stetig ist.

(b) Wir betrachten speziell $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ mit $Tf = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass T linear und stetig ist, wenn man $C([0,1])$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versieht.

(c) Wir betrachten die Ableitung auf dem Vektorraum der Polynome, d.h. $D : P \to P$, mit $Dp = p'$. Zeigen Sie, dass D linear ist und bestimmen Sie das Bild, den Kern und die Eigenwerte von D.

LÖSUNG: 1. Es sei T stetig in x_0 und $x_n \to x \in X$ eine konvergente Folge in X. Dann gilt wegen der linearität von T, $\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x + x_0) - T(x_0)\| \to 0$, da $x_n - x + x_0$ gegen x_0 konvergiert und T stetig in x_0 ist. Damit ist T auch stetig in x.

2. Die Linearität folgt mit den Eigenschaften des Integrals. Denn es gilt $T(\lambda f + \mu g) = \int_0^1 \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lambda f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda Tf + \mu Tg$.

   Für die Stetigkeit benutzen wir (a) und zeigen die Stetigkeit im Punkt $f_0 = 0$. Es sei f_n eine Nullfolge in $C([0,1])$ bzgl. der ∞-Norm. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$ und $n \geq N$. Damit folgt

$$
\begin{aligned}
|Tf_n| &= \left|\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon \int_0^1 \mathrm{d}x \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

   Also ist Tf_n eine Nullfolge. Da $T0 = 0$ gilt, folgt die Stetigkeit von T.

3. Die Linearität folgt mit den Eigenschaften differenzierbarer Funktionen. Es gilt $D(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)' = \lambda p' + \mu q' = \lambda Dp + \mu Dq$. Das Bild von D ist wieder P, d.h. D ist surjektiv. Denn ist $p = \sum_{i=0}^m \alpha_i x^i$ ein Polynom, so ist jede Stammfunktion von p ein Urbild von p, d.h. mit $q = \sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i}{i+1} x^{i+1}$ gilt $Dq = p$.

   Da $\mathrm{Kern}(D) = \{p \in P : Dp = 0\}$, folgt unmittelbar $\mathrm{Kern}(D) = \{p : \mathrm{Grad}\, p < 1\} = \{p : p \text{ ist konstant}\}$. Die Polynome vom Grad 0 liegen offensichtlich im Kern und ein Polynom vom Grad ≥ 1 besitzt mindestens einen Summanden der Form αx^n mit $\alpha \neq 0$ und $n \geq 0$, ist also nicht Null.

Ist λ ein Eigenwert von D, so gibt es ein $p \in P \setminus \{0\}$ mit $Dp = \lambda p$. Ist p ein Polynom vom Grad n so ist offensichtlich $Dp = p'$ ein Polynom vom Grad $n-1$. Damit folgt sofort, dass für $\lambda \neq 0$ kein solches p existiert, da sonst Grad $Dp = n-1 =$ Grad $p = n$ also $n = n-1$ gelten müsste. Für $\lambda = 0$ sind jedoch die konstanten Polynome Eigenvektoren, da in diesem Fall $Dp = 0 = \lambda p$ gilt. Also ist 0 einziger Eigenwert von D.

(T 3)

Zeigen Sie, dass auf $C([0,1])$ die beiden Normen $\|f\|_1 = \int |f|$ und $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ nicht äquivalent sind.

LÖSUNG: Annahme: Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $f \in C([0,1])$ die Ungleichung $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1$ gilt.

Für $n \in \mathbb{N}$ wählen wir die Funktion f_n gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx+1 & \text{für} \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{für} \quad x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Dann gilt offensichtlich $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int |f_n(x)| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} -nx+1 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Damit folgt nun nach Annahme

$$\|f_n\|\infty = 1 \leq C\|f_n\|_1 = C\frac{1}{2n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies würde aber $C \geq 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bedeuten, ein Widerspruch.