Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 2.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

1. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_0^\pi (x^n + \cos x)\,dx$, für $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1}\,dx$.

(c) $\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$.

(d) $\int_0^1 e^{2x}\,dx$.

(e) $\int_0^\pi e^{\sin x}\cos x\,dx$.

LÖSUNG: (a) Wir benutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (x^n + \cos x)\,dx &= \int_0^\pi x^n\,dx + \int_0^\pi \cos x\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^\pi + \sin x|_0^\pi \\ &= \frac{\pi^{n+1}}{n+1} + (\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

(b) Mit Substitution folgt

$$\int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1}\,dx = 2\cdot\int_0^1 \frac{(x^3+2x+1)'}{x^3+2x+1}\,dx = 2\cdot\int_1^4 \frac{1}{t}\,dt = 2\cdot\log(t)|_1^4 = 2\cdot\log(4).$$

(c) Partielle Integration liefert

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = (\log x)^2|_1^e - \int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx.$$

Damit folgt

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\log x)^2|_1^e = \frac{1}{2}.$$

(d) Mit Substitution folgt

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x)'e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^t\,dt = \frac{1}{2}\,e^t\big|_0^2 = \frac{1}{2}(e^2-1).$$

(e) Die Funktion $e^{\sin x}$ ist eine Stammfunktion des Integranden. Also gilt

$$\int_0^\pi e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x}|_0^\pi = 0.$$

(T 2)

Es seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq f(b)$$

gilt.

Lösung: Da f wachsend ist, gilt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in [a, b]$. Damit folgt

$$(b-a)f(a) = \int_a^b f(a) \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b f(b) \, dx = (b-a)f(b),$$

und damit

$$f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq f(b).$$

(T 3)

Es sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zeigen Sie, dass $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sin(x)f(x)$ uneigentlich integrierbar auf $[0, \infty)$ ist, d.h. dass $\int_0^\infty \sin(x)f(x) \, dx$ existiert.

Lösung: Es ist klar, dass f sprungstetig auf jedem Intervall $[0, b]$ ist, da f monoton ist. Damit ist g als Produkt sprungstetiger Funktionen ebenfalls sprungstetig.

Wir teilen das Integral in Intervalle, auf denen die Sinusfunktion keinen Vorzeichenwechsel hat. Das heißt, wir definieren $a_k := \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(x)f(x) \, dx$. Dann gilt $a_k \geq 0$ für k gerade und $a_k \leq 0$ für k ungerade. Weiter gilt

$$|a_k| = \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(x)f(x) \, dx \right| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|f(x) \, dx$$

Da $|\sin(x)|f(x) = |\sin(x + \pi)|f(x) \geq |\sin(x + \pi)|f(x + \pi)$ und damit ist $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend. Außerdem gilt unter zu Hilfenahme der obigen Ungleichung

$$|a_k| \leq \pi f(k\pi) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Also folgt mit dem Leibniz Kriterium für Reihen, dass $\sum_{k=0}^\infty a_k$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Wir zeigen nun, dass das uneigentliche Integral den Wert a hat.

Es sei $\varepsilon > 0$. Da die Reihe konvergent ist, gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k - a \right| \leq \varepsilon/2$$

für alle $n \geq K$. Es sei nun $R_1 = K\pi$. Weiter gibt es ein $R_2 > 0$ mit $f(x) < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ für alle $x \geq R_2$. Es sei nun $R > \max\{R_1, R_2\} + \pi$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $N\pi \leq R \leq (N + 1)\pi$ und damit gilt

$$\left| \int_0^R \sin(x)f(x) \, dx - a \right| = \left| \sum_{k=0}^N a_k + \int_{N\pi}^R \sin(x)f(x) \, dx - a \right| \leq \varepsilon/2 + \pi f(N\pi) < \varepsilon.$$

Dies beendet den Beweis.