Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 30.6.2008

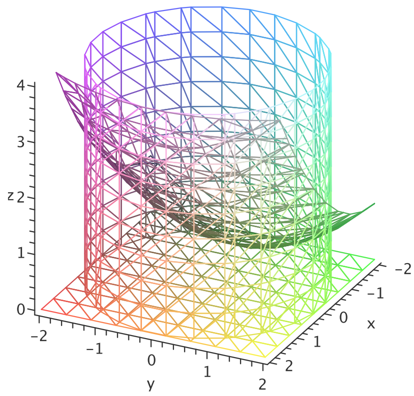
Analysis II für M, LaG/M, Ph

13. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie das Volumen, das innerhalb des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ oberhalb der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ und unterhalb des Paraboloids $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 2)^2 + y^2 = 4z\}$ liegt.



(G 2)

Es sei $K_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ die abgeschlossene Kugel um Null mit Radius R in $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Masse dieser Kugel, unter der Annahme, dass sie aus einem Material der konstanten Dichte $\varrho = 1$ besteht.

(b) Bestimmen Sie die Masse der Kugel, wenn die Dichte linear vom Nullpunkt aus zum Rand von 0 auf 1 zunimmt.

(c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel aus (b) bei einer Drehung um die z-Achse.

Formeln: Die Masse eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Massendichte $\varrho(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in K$, berechnet sich anhand des Integrals

$$\int_K \varrho(\mathrm{x}) \, \mathrm{dx}$$

und das Trägheitsmoment ist gegeben durch

$$\int_K a(\mathrm{x})^2 \varrho(\mathrm{x}) \, \mathrm{dx},$$

wobei $a(\mathrm{x})$ der Abstand von x zur Drehachse ist.

(G 3)

Die *Archimedische Spirale* in $\mathbb{R}^2$ ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\{(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) : r = \varphi,\ \ \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Skizzieren Sie diese Menge und berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Archimedischen Spirale und der positiven x-Achse eingeschlossen wird.