Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 23.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

12. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar über I. Zeigen Sie für alle $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$

(a) $\lambda f + \nu g$ ist Riemann-integrierbar, d.h. die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf I ist ein Vektorraum.

(b) $\displaystyle\int_I \big(\lambda f(x) + \nu g(x)\big)\, \mathrm{d}x = \lambda \int_I f(x)\, \mathrm{d}x + \nu \int_I g(x)\, \mathrm{d}x.$

(c) Ist $f \geq 0$, so gilt $\displaystyle\int_I f(x)\, \mathrm{d}x \geq 0.$

(d) Ist $f \leq g$, so gilt $\displaystyle\int_I f(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_I g(x)\, \mathrm{d}x.$

(G 2)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } y \geq 0 \text{ und } x \leq y < x + 1 \\ -1, & \text{falls } y \geq 0 \text{ und } x + 1 \leq y \leq x + 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x,$$

wobei alle auftretenden Integrale im Sinne der Analysis I zu verstehen sind.

Was fällt Ihnen auf?

Hausübungen

(H 1)

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f, g : A \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar über A. Zeigen Sie für alle $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$

(a) $\lambda f + \nu g$ ist Riemann-integrierbar, d.h. die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf A ist ein Vektorraum.

(b) $\displaystyle\int_A \big(\lambda f(x) + \nu g(x)\big)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_A f(x)\ \mathrm{d}x + \nu \int_A g(x)\ \mathrm{d}x.$

(c) Ist $f \geq 0$, so gilt $\displaystyle\int_A f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0.$

(d) Ist $f \leq g$, so gilt $\displaystyle\int_A f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_A g(x)\ \mathrm{d}x.$

(H 2)

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar. Zeigen Sie, dass dann auch das Innere A° und der Abschluss $\overline{A}$ von A messbar sind und dass $\mu(A) = \mu(A^\circ) = \mu(\overline{A})$ gilt.

(H 3)

Begründen Sie warum die folgenden Integrale existieren und berechnen Sie ihren Wert

(a) $\displaystyle\int_{[0,1]^2} (x^2 + xy^3)\ \mathrm{d}(x,y)$

(b) $\displaystyle\int_D \big(\mathrm{e}^{x+z}\ln(y)w + wx^2\sin(w)\big)\ \mathrm{d}(x,y,z,w)$, wobei $D := [0,1] \times [1,\mathrm{e}] \times [0,2] \times [0,\pi]$

(c) $\displaystyle\int_K x\ \mathrm{d}(x,y)$, wobei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0 \text{ und } y \geq 0\}.$