Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 16.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

11. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

(a) Untersuchen Sie für $n \geq 2$, ob nachstehende Folgen Dirac-Folgen auf $I \subseteq \mathbb{R}$ sind:

$$\begin{aligned} c_n(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2x^2+1} && \text{auf} \quad I = \mathbb{R}; \\ D_n, F_n & && \text{auf} \quad I = [-\pi, \pi], \end{aligned}$$

wobei D_n bzw. F_n der Dirichlet- bzw. Fejerkern n-ten Grades, definiert wie in der Vorlesung (27.1 d)), seien.
(**Hinweis:** Hierbei dürfen die Darstellungen Aufgabe (H 1) verwendet werden.)

(b) Sei $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{supp} f$ kompakt. Wir setzen $M := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ und $f_n(x) := \frac{n}{M} f(xn)$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Dirac-Folge ist.

(G 2)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{für } |x| \leq \pi/2, \\ 1, & \text{für } \pi/2 < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

1. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und bestimmen Sie die Fourierreihe von f.
2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe von f und was ist die Grenzfunktion?
3. Berechnen Sie mit Hilfe der Fourierreihe von f den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)(4k+1)}.$$

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

(G 3)

Wir betrachten die 2π-periodische Funktion f, gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - t), & 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hausübungen

(H 1)

Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi\mathbb{Z}\}$ gilt

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})},$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2.$$

(H 2)

Wir wollen den folgenden Satz über die gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen beweisen. Beachten Sie, dass die Voraussetzungen deutlich stärker sind als nötig, sie erlauben jedoch einen relativ einfachen Beweis.

Satz. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und 2-mal stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

wobei a_n und b_n durch (9.12) gegeben sind, gleichmäßig gegen f.

Hinweis: Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von f'' und integrieren Sie partiell.

(H 3)

Betrachten Sie die 2π-periodische Funktion g gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases}.$$

(a) Skizzieren Sie g, und geben Sie die Fourier-Reihe von g an.

(b) Ermitteln Sie damit den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$