Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008 9.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

10. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Wir definieren folgende Wege im $\mathbb{R}^2$:
Sei γ_1 der Halbkreis von $(0,1)$ durch $(1,0)$ nach $(0,-1)$. γ_2 sei der Strahl von $(0,-1)$ nach $(-\infty,-\infty)$, der mit der y-Achse ebenfalls einen Winkel von $45°$ bildet.

a) Skizzieren Sie den Weg $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ und geben Sie eine Parametrisierung von γ an.

b) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das Kurvenintegral $\int_\gamma e^{\alpha x} dx$, wobei $e^{\alpha x} := (e^{\alpha x_1}, e^{\alpha x_2})$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

(G 2)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:

Ist $\int_\gamma F(x)dx$ wegunabhängig, dann ist F ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla\varphi$.

(G 3)

Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^n$ zwei stetig differenzierbare Kurven. Die Kurven heißen äquivalent, falls es eine monoton wachsende, stetig differenzierbare, bijektive Funktion $\varphi : J \to I$ gibt, so dass $\gamma(\varphi(t)) = \tilde{\gamma}(t)$ für alle $t \in J$ gilt. $\tilde{\gamma}$ heißt auch Umparametrisierung von γ.

Zeigen Sie, dass sich jede stetig differenzierbare Kurve nach der Weglänge parametrisieren lässt, d.h. zu jeder Kurve γ gibt es eine Umparametrisierung $\tilde{\gamma}$, so dass $|\tilde{\gamma}'| = 1$ gilt.

Hausübungen

(H 1)

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

(a) $\int_\gamma (x+y)\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$ längs der Kurve, die von $(-1,1)$ nach $(1,1)$ auf der Parabel $y = x^2$ verläuft.

(b) $\int_\gamma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$ längs des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$, bei einem vollen Umlauf in positivem Sinn.

(H 2)

Es seien $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) $\text{rot}\,(h \cdot F) = h \cdot \text{rot}\,F - F \times \nabla h$;

(b) $\text{rot}\,(\text{rot}\,F) = \nabla(\text{div}\,F) - \Delta F$.

(H 3)

Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist. Genauer: Ist $f \circ \gamma$ stetig und $\tilde{\gamma}$ eine Umparametrisierung von γ, so gilt

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{\gamma}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$