Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008 2.6.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

9. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien $p, q \in (1, \infty)$ fest gewählt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Bestimmen Sie das Minimum von

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) := xy = 1.$$

Folgern Sie hieraus auch $\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q \geq uv$.

(G 2)

Berechnen Sie die Kurvenlänge der folgenden Kurven

(a) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$, wobei $r, c > 0$.

(b) $g : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$

(G 3)

Es seien $a, b > 0$ und

$$M_{a,b} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hausübungen

(H 1)

Bestimmen Sie das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, der im Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Platz hat.

(H 2)

Betrachten Sie die Kurve

$$X : \ [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \ X(t) = (t^2, t^3).$$

(a) Skizzieren Sie die Bahn der Kurve.

(b) In welchen Punkten $X(t)$ gilt $X'(t) \neq (0,\, 0)$?

(c) Berechnen Sie die Länge der Kurve X.

(H 3)

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y, z) = (x^2 + xy - y - z, 2x^2 + 3xy - 2y - 3z)$. Zeigen Sie, dass $M = f^{-1}(0)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie den Tangentialraum T_0M.