Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008 26.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

8. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$y\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^y = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ eindeutig eine Funktion $h(x) = y(x)$ definiert, die die Gleichung nach y auflöst. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von h im Punkt $x = 0$.

(G 2)

Es sei $A : (0,1) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Weiter habe für jedes $t \in (0,1)$ die Matrix $A(t)$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1(t) < \lambda_2(t)$. Zeigen Sie

(a) durch explizite Berechnung der Eigenwerte,

(b) durch Verwendung des Satzes über implizite Funktionen,

dass die Abbildungen $\lambda_1, \lambda_2 : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass λ_1 und λ_2 stetig sind.

(G 3)

(a) Es sei $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve mit $\gamma(t) = (t^3, t^6)^T$, $t \in [-1,1]$. Zeigen Sie dass $\gamma((-1,1))$ eine eindimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $M := \{x_1, \ldots, x_k\}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist und bestimmen Sie deren Dimension.

Hausübungen

(H 1)

Zeigen Sie, dass durch die Gleichungen

$$x\cos(z) + y\sin(z) + (x+y+z)^{42} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

in einer Umgebung des Punktes $x_0 = \frac{\pi}{4}$ eindeutig eine Funktion $h(x) = (y(x), z(x))$ mit $h(\pi/4) = (0, -\pi/4)^T$ definiert wird und berechnen Sie $h'(\pi/4)$.

(H 2)

Verallgemeinern Sie die Aussage aus Aufgabe (G2) auf stetig differenzierbare Funktionen $A : (0,1) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dazu können Sie wahlweise die Methode aus (G2) (a) oder (G2) (b) verwenden. Die Stetigkeit aus dem Hinweis zu Aufgabe (G2) dürfen Sie natürlich auch hier verwenden.

(H 3)

Zeigen Sie, dass für jedes $n \geq 2$ die obere Hälfte der Einheitssphäre

$$S_+^{n-1} := \{x \in S^{n-1} : x_n > 0\}$$

eine $(n-1)$-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.