Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 19.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

7. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Auf der Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : A \text{ invertiertbar}\}$ betrachten wir die Abbildung $\mathrm{Inv} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Inv}(A) = A^{-1}$ aus Lemma VII.1.5 der Vorlesung. Zeigen Sie, dass Inv stetig ist.

(G 2)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f(x, y) := (x^3 + xy + 1,\ x + y + y^3 + 1).$$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung des Punktes $(1, 1)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine Umgebung des Punktes $(3, 4)$ abgebildet wird und berechnen Sie den Wert der Umkehrfunktion von f im Punkt $(3, 4)$, sowie den Wert ihrer Ableitung an dieser Stelle.

(G 3)

Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Außerdem sei f in U stetig differenzierbar und $f'(x)$ für jedes $x \in U$ invertierbar. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) f ist offen.

(b) Die Funktion $g : \overline{U} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \|f(x)\|$ nimmt auf $\overline{U}$ ein globales Maximum an.

(c) $\max_{x \in \overline{U}} g(x) > g(y)$ für alle $y \in U$.

(d) Ist $x_0 \in \overline{U}$ eine globale Maximalstelle von g, so gilt $x_0 \in \partial U$, d.h. die Funktion g nimmt ihr Maximum auf dem Rand an.

Hausübungen

(H 1)

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Im}(f)$ und entscheiden Sie ob f ein Diffeomorphismus ist. Geben Sie weiter alle Punkte an, um die es eine Umgebung gibt, so dass die Einschränkung von f auf diese Umgebung ein Diffeomorphismus ist. Berechnen Sie schließlich in der Umgebung eines (von Ihnen gewählten) Punktes eine (von Ihnen gewählte) Umkehrfunktion.

(H 2)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + \sin(y),\ y\cos(x))$$

in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ eine lokale Umkehrfunktion besitzt und bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $(0, 0)$.

(H 3)

Wir untersuchen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = (x - y,\ \mathrm{e}^{x+y}).$$

(a) Geben Sie $f(\mathbb{R}^2)$ an, bestimmen Sie alle Punkte in $\mathbb{R}^2$, in denen f lokal invertierbar ist, und berechnen Sie in all diesen Punkten eine lokale Umkehrfunktion.

(b) Geben Sie ein maximales Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ an, auf dem f injektiv ist, d.h. so dass es kein Gebiet G' mit $G \subsetneq G'$ gibt, auf dem f immer noch injektiv ist.

(c) Ist f ein Diffeomorphismus? Falls ja, berechnen Sie die Ableitung $(f^{-1})'$ der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(G) \to G$ von f.