Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 5.5.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

5. Übung

Dieses Blatt enthält die Hausübungen zur 5. und 6. Übung. Ihre Bearbeitungen sind bis zum 19.5.2008 bei Ihrer Übungsleiterin bzw. Ihrem Übungsleiter abzugeben.

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt 0 der folgenden Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^{30}y^{25}z^{10} + 15x^2y^{15}z^3 + 3y^2z^2 + 42$.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ mit $g(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$.

Bei Umordnung dieser Reihe in eine Potenzreihe bezüglich x mit Koeffizienten, die von y abhängen, erhält man für jedes y einen Konvergenzradius. Bestimmen Sie diesen.

(G 2)

(a) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex. Beweisen Sie, dass $\|x^\alpha\|_2 \le \|x\|_2^{|\alpha|}$ gilt.

(b) Zeigen Sie die Leibniz-Regel für Multiindizes:

Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, so gilt für $|\alpha| \le k$

$$D^\alpha(f \cdot g) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g.$$

Hierbei haben wir $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ gesetzt. Außerdem gilt $\beta \le \alpha$ genau dann, wenn $\beta_i \le \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(G 3)

Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine homogene Funktion vom Grad 2 (d.h. $f(tx) = t^2 f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass f eine quadratische Form also $f(x) = x^T Ax$ ist, wobei A eine $n \times n$ Matrix ist. Berechnen Sie A.

Hausübungen

(H 1)

Es sei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < 1\}$ und $M \ge 0$. Ferner sei $f : U \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar und T_2 das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

a) Zeigen Sie: Sind alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung durch M beschränkt, so gilt

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{4}{3} M \|(x,y)\|^3, \quad (x,y) \in U.$$

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sin\left(\frac{x+2y}{2}\right) + \cos\left(\frac{2x-y}{2}\right)$$

im Entwicklungspunkt $(0,0)$ und zeigen Sie, dass für $(x,y) \in U$ gilt:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{4}{3} \cdot 2\|(x,y)\|^3.$$

(H 2)

Es sei $r > 0$ und $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel um 0 mit Radius r. Weiter sei $f : B(0,r) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen von f mögen einer Abschätzung

$$|D^\alpha f(x)| \leq \alpha! a_{|\alpha|}$$

für alle $x \in B(0,r)$ genügen. Zeigen Sie, dass die Funktion mit ihrer Taylorreihe übereinstimmt, d.h. $R_m f(x) \to 0$ für $m \to \infty$, für alle $x \in B(0,r)$, falls der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k t^k$ größer oder gleich r ist.

(H 3)

Berechnen Sie Δu für die Funktionen

(a) $u_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|_2^\alpha$ (b) $u_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2} \mathrm{e}^{\alpha \|x\|_2}$

wobei $\alpha \neq 0$ ist. Geben Sie weiter alle Fälle an, in denen die jeweilige Funktion einer Differentialgleichung $\Delta u = \lambda u$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ genügt.

6.Übung
Hausübungen

(H 4)

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y,$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy + 1.$

(H 5)

Klassifizieren Sie die kritischen Punkte der Funktionen

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 - y^3 + 3\alpha xy\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

nach Maxima, Minima und Sattelpunkten.

(H 6)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 3x^4 - 4x^2 y + y^2,$$

eingeschränkt auf eine Gerade durch den Ursprung, dort ein lokales Minimum besitzt. Ist der Ursprung lokales Minimum von f?