Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 28.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

4. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie für die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \int_1^{x^2+1} \frac{1}{t} \mathrm{e}^{-(xt)^2} \, \mathrm{d}t$$

die Ableitung h'.

(G 2)

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 3-mal stetig differenzierbar. Geben Sie bei den folgenden Abbildungen jeweils an, von welchem Raum in welchen Raum sie abbilden und ob sie linear, bilinear, trilinear,... oder gar nichts davon sind.

1. $u \mapsto D^2 f(x_0)(u, v)$,	2. $x_0 \mapsto D^2 f(x_0)(u, v)$,	3. $v \mapsto D^2 f(x_0)(u, v)$,
4. $(u, v) \mapsto D^2 f(x_0)(u, v)$,	5. $u \mapsto D^2 f(x_0)(u, u)$,	6. $v \mapsto D^2 f(x_0)(v, u)$,
7. $(u, x_0) \mapsto D^2 f(x_0)(u, v)$,	8. $u \mapsto D^3 f(x_0)(u, v, w)$,	9. $(u, v) \mapsto D^3 f(x_0)(u, v, w)$,
10. $(u, v, w) \mapsto D^3 f(x_0)(u, v, w)$	11. $x_0 \mapsto D^3 f(x_0)(u, v, w)$,	12. $x_0 \mapsto D^2 f(x_0)(u, \cdot)$.

Hierbei nehmen wir jeweils die Größen, die nicht links vom „$\mapsto$“ stehen, als konstant gegeben an.

(b) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}^2$ die Hesse-Matrix $H_f(x)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \frac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_2^2 + 1} - \sin(x_2)$$

und berechnen Sie $D^2 f(0)(\mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2)$.

(G 3)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}$ seien zwei Mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2(\nabla f \mid \nabla g) + g\Delta f$$

gilt, wobei der *Laplace-Operator* Δ durch

$$\Delta f(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x), \quad x \in U,$$

gegeben ist.

Hausübungen

(H 1)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2 y \sin(\frac{y}{x}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x,y)$ und $\partial_2 f(x,y)$ von f in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, dass $\partial_1 f$ für alle $y \neq 0$ im Punkt $(0,y)$ unstetig ist.

(b) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit in $(0,y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

(H 2)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und für je zwei Punkte $x, y \in U$ existiere ein Streckenzug $x = z_0, z_1, \ldots, z_l = y$ mit $\overline{z_{k-1} z_k} \in U$ für alle $k = 1, \ldots, l$. Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ genau dann konstant auf U ist, wenn $\mathrm{grad} f(x) = 0$ für alle $x \in U$ gilt.

(H 3)

Es sei $\beta \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x) = \|x\|_2^\beta x$.

(a) Für welche Werte von β ist f in 0 differenzierbar?

(b) Für welche Werte von β und $m \in \{1, \ldots, n\}$ existiert die partielle Ableitung $\partial_m^2 f_m$?