Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 21.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

3. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Im mathematischen Institut in Neustadt an der Weierstraße wurde eingebrochen. Es fehlen nur ein paar konvergente Reihen, aber bei den Funktionen in zwei Variablen ist vieles durcheinander geraten. Können Sie helfen und die Graphen und Höhenlinien, d.h. die Mengen, auf denen $f(x,y)=c$ für vorgegebenes $c\in\mathbb{R}$ gilt, (s. die Bilder auf einem Extrablatt) der folgenden Funktionen wieder richtig zuordnen?

$$\begin{array}{lll} f_1(x,y)=x+y-1, & f_2(x,y)=x^2+4y^2, & f_3(x,y)=x^2-y^2-8,\\ f_4(x,y)=\sin(x), & f_5(x,y)=\frac{1}{(1-x)(1-y)}, & f_6(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2+10},\\ f_7(x,y)=\ln(x^2+y^2), & f_8(x,y)=\tan(x^2+y^2), & f_9(x,y)=e^{x+y},\\ f_{10}(x,y)=x^3-y^2+4, & f_{11}(x,y)=\sin(x)\cdot\sin(y). & \end{array}$$

Beachten Sie, dass die Auflösungsmöglichkeiten des Rechners begrenzt sind, so dass einige Bilder ungenau sind.

(G 2)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^2$, entscheiden Sie (ohne Begründung) ob sie jeweils beschränkt und/oder konvergent sind und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

$$a_n := \left(n,\frac{1}{n}\right)^T,\quad b_n := \left(\frac{1}{n^2},\frac{n}{1+n}\right)^T,\quad c_n := \left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n^2}\right)^T,\quad d_n := \left(\sin(\frac{n\pi}{4}),\cos(\frac{n\pi}{4})\right)^T.$$

(b) Geben Sie vier weitere Nullfolgen in $\mathbb{R}^2$ an.

(c) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{falls } (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{falls } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(G 3)

Es sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y):=\begin{cases}\|(x,y)^T\|_2, & \text{falls } y>0,\\ -\|(x,y)^T\|_2, & \text{falls } y<0,\\ x, & \text{falls } y=0.\end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $Df(x,y)$ und $\operatorname{grad} f(x,y)$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $y\neq 0$.

(b) Bestimmen Sie alle $v\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, für die die Richtungsableitung $D_vf(0,0)$ existiert.

(c) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

Hausübungen

(H 1)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen f stetig ist.

(b) Untersuchen Sie die Richtungsableitungen $D_v f(0,0)$, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, auf Existenz und geben Sie falls möglich $\operatorname{grad} f(0,0)$ an.

(c) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

(H 2)

Es sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ und } y > 0\}$ und $E := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : w > 0\}$. Wir definieren die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^3$ und $g : E \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \big(\log(xy),\ \cos(x^2+y),\ \mathrm{e}^x\big) \quad \text{und} \quad g(u,v,w) := \mathrm{e}^u + vw + \log(w).$$

Zeigen Sie, dass $h := g \circ f$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung

(a) nach der Kettenregel,

(b) direkt durch Ableiten von $h = h(x,y)$.

(H 3)

(a) Berechnen Sie jeweils die Jacobimatrizen der folgenden Funktionen.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto 3x^2y + \exp(xz^2) + 4z^3,$

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto \big(xy,\ \cosh(xy),\ \log(1+x^2)\big),$

(iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto \big(\log(1+x^2+z^2),\ z^2+y^2-x^2,\ 3\sin(xz)\big).$

(b) Bestimmen Sie $\partial_1 f(x,1)$ für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \cos(x+y-1)\cdot y + \log(y)\cdot x^7 \cdot \log(\log(1+\arctan(\frac{1+x^2y^4}{3+x^4+\sin^2(\arctan(yx))}))).$$