Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 14.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

2. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ betrachten wir wieder den Raum $C^1[a, b]$, vgl. Aufgabe (G2) auf Blatt 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $C^1[a, b]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist kein Banachraum.

(b) Versehen wir $C^1[a, b]$ dagegen mit der Norm $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ aus Aufgabe (G2) von Blatt 1, so ist $(C^1[a, b], \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

(G 2)

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$, die mindestens zwei Punkte enthält, genau dann zusammenhängend ist, wenn sie ein Intervall ist.

(G 3)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir betrachten die Mengen

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Geben Sie ein Beispiel an, für dass $\overline{U_\varepsilon(x)} \neq K_\varepsilon(x)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie $X = (\mathbb{R} \setminus [1/2, 3/2]) \cup \{1\}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik.

Hausübungen

(H 1)

Beweisen Sie Satz 4.7 der Vorlesung, d.h. die folgenden Aussagen:

(a) Jeder wegzusammenhängende metrische Raum ist zusammenhängend.

(b) Jede zusammenhängende, offene Teilmenge M eines normierten Vektorraums ist wegzusammenhängend.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie für ein fest gewähltes $a \in M$ die Menge

$$E := \{x \in M : x \text{ ist mit } a \text{ verbindbar}\},$$

wobei x mit a *verbindbar* heißt, falls es ein Intervall $[\alpha, \beta]$ und eine stetige Funktion $\gamma : [\alpha, \beta] \to M$ mit $\gamma(\alpha) = a$ und $\gamma(\beta) = x$ gibt. Zeigen Sie dann, dass E nicht-leer, offen und abgeschlossen in M ist.

Bemerkung: Im Allgemeinen ist nicht jede zusammenhängende Menge auch wegzusammenhängend. Ein Beispiel ist die Menge $\{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$ in $\mathbb{R}^2$.

(H 2)

Zeigen Sie, dass es unstetige lineare Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen gibt. Betrachten Sie dazu den normierten Vektorraum $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$, wobei $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

bezeichnet und die Abbildung $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ mit $T(f) := f(1)$.

(H 3)

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und es seien $A \subseteq M$ abgeschlossen und $K \subseteq M$ kompakt mit $A \cap K = \emptyset$. Weiterhin betrachten wir die Funktion $\mathrm{dist} : K \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{dist}(y) = \inf_{x \in A} \mathrm{d}(x, y), \quad y \in K.$$

(a) Weisen Sie nach, dass die Funktion dist stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass A und K einen echt positiven Abstand haben, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass $\mathrm{d}(x, y) \geq \delta$ für alle $x \in A$ und $y \in K$ gilt.

(c) (*) Gilt die Aussage aus (b) auch für zwei abgeschlossene Teilmengen mit leerem Schnitt?

(*) Dieser Aufgabenteil ist als Anregung zum Nachdenken gedacht, er wird nicht bewertet.