Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 7.4.2008

Analysis II für M, LaG/M, Ph

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Wir betrachten die „p-Normen“ aus Beispiel 1.5 der Vorlesung. Beweisen Sie, dass für $1 \le p \le \infty$ die Abbildung $\| \cdot \|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auch wirklich eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert und damit der Name p-Norm gerechtfertigt ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Höldersche Ungleichung. (Analysis I, Korollar IV.2.16)

Zeigen Sie weiter, dass die Einheitskugel $B_p(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p < 1\}$ für jedes $1 \le p \le \infty$ konvex ist. Ist Ihr Beweis auch für eine beliebige Norm gültig?

(Eine Teilmenge M eines $\mathbb{R}$-Vektorraums heißt konvex, falls für alle $x, y \in M$ und alle $\lambda \in [0,1]$ auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$ gilt.)

(G 2)

Für $f \in C^1[a,b]$ sei

$$\|f\| := \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad |||f||| := \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

(a) Zeigen Sie, dass durch $\| \cdot \|$ eine Norm auf $C^1[a,b]$ definiert ist, aber $||| \cdot |||$ keine Norm auf diesem Raum ist.

(b) Offenbar ist die Menge $N := \{f \in C[a,b] : |||f||| = 0\}$ ein Untervektorraum von $C^1[a,b]$. Zeigen Sie, dass N genau aus allen konstanten Funktionen besteht und bestimmen Sie die Dimension von N.

(c) Zeigen Sie, dass durch $f \sim g :\Leftrightarrow f - g \in N$ eine Äquivalenzrelation auf $C^1[a,b]$ definiert wird und bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[f]$ eines beliebigen Elements $f \in C^1[a,b]$. Bekanntlich wird die Menge

$$C^1[a,b]/N := \{[f] : f \in C^1[a,b]\}$$

der Äquivalenzklassen vermöge

$$[f] + [g] := [f+g], \quad \lambda[f] := [\lambda f], \qquad (f, g \in C^1[a,b], \lambda \in \mathbb{K})$$

zu einem Vektorraum, dem *Quotientenraum* von $C^1[a,b]$ bzgl. N.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$||| \cdot |||_N : C^1[a,b]/N \to [0,\infty), \quad |||[f]|||_N := \inf_{g\in[f]} |||g|||$$

wohldefiniert ist.

(e) Beweisen Sie, dass $(C^1[a,b]/N, ||| \cdot |||_N)$ ein normierter Raum ist.

Hausübungen

(H 1)

Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Abbildungen $d : M \times M \to [0, \infty)$ Metriken sind.

(a) $M \neq \emptyset$ beliebig und

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

(b) $M = \mathbb{R}^n$, $0 < p < 1$ und $d(x,y) := \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

(c) $M = \mathbb{R}$ und $d(x,y) := |\arctan x - \arctan y|$.

(d) Es sei $M = \{(a_n)_{n\geq 1}\}$ die Menge aller Folgen komplexer Zahlen und

$$d((a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|a_n - b_n|}{1 + |a_n - b_n|}.$$

(H 2)

Beweisen Sie Satz 2.2 c) und Satz 2.2 e) der Vorlesung. D.h. in einem metrischen Raum (M, d) gilt:

(a) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

(b) Eine Menge $A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie folgenabgeschlossen ist.

(H 3)

Beweisen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

gilt.