

Mathematik II für MB, WI/MB und andere
Prof. Dr. Wilhelm Stannat

Inhalt:

1. Folgen und Reihen von Funktionen
2. Kurven im \mathbb{R}^n
3. Funktionen in mehreren Variablen
4. Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher
5. Implizite Funktionen und Extrema mit Nebenbedingungen
6. Parameterintegrale
7. Wegintegrale
8. Integrale im \mathbb{R}^n
9. Vektoranalysis

Das vorliegende Skript ist eine *korrigierte* Zusammenfassung der Kapitel 6 bis 9 der Vorlesung Mathematik II für MB, WI/MB und andere, die im SS 2008 an der TU Darmstadt gehalten wurde. Die Lektüre des Skriptes ist kein gleichwertiger Ersatz für den Besuch der Vorlesung.

Korrekturen bitte per Email an stannat@mathematik.tu-darmstadt.de

6 Parameterintegrale

Viele Funktionen der Analysis erscheinen als Integrale der Form

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

oder in der Form

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Im zweiten Fall tritt x als Parameter des Integranden f auf.

Wichtiges Beispiel: Laplacetransformierte

$$F(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-xt} dt, \quad x \in]0, \infty[$$

wobei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig

Im Folgenden beschränken wir uns auf eigentliche Parameterintegrale:

Satz Es sei $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Rechteck und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für die Integralfunktion

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$

(a) F ist stetig auf $[a, b]$

(b) **Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge**

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

(c) **Differentiation unter dem Integralzeichen** Ist f zusätzlich stetig partiell nach x differenzierbar, so ist F nach x differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy, \quad x \in [a, b] \quad (6.1)$$

Beispiele

(i) $F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t} dt, F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx) dt, F''(x) = - \int_1^\pi t \sin(tx) dt$

(ii) **Bessel-Funktionen**

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t - nt) \sin t \, dt \\ &= -\frac{x}{\pi} \int_0^\pi (\cos t)^2 \cos(x \sin t - nt) \, dt + \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \cos t \cos(x \sin t - nt) \, dt \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) (\sin t)^2 \, dt$$

also

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0$$

J_n ist also eine Lösung der **Besselschen Differentialgleichung**

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

Hängt im Parameterintegral zusätzlich die Integrationsgrenze vom Parameter x ab, so gilt statt (6.1):

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \, dy + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x)$$

Hierbei sind $g, h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig differenzierbar.

Beispiel

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(s) \sin(k(t-s)) \, ds.$$

Dann gilt

$$u'(t) = \int_0^t f(s) \cos(k(t-s)) \, ds + \underbrace{\frac{1}{k} f(t) \sin 0}_{=0} = \int_0^t f(s) \cos(k(t-s)) \, ds$$

$$u''(t) = -k \int_0^t f(s) \sin(k(t-s)) \, ds + f(t) \underbrace{\cos 0}_{=1}$$

also ist u Lösung der **Schwingungsgleichung**

$$u''(t) + k^2 u(t) = f(t).$$

7 Wegintegrale

7.1 Integration eines Vektorfeldes entlang von Kurven

Ein Kraftfeld kann man sich als Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

denken. In jedem Punkt X bestimmt der Vektor $F(X)$ die Kraft, die in diesem Punkt wirkt. Die Bewegung eines Massenpunktes durch das Kraftfeld kann durch eine (stetig differenzierbare) Kurve $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ im \mathbb{R}^3 beschrieben werden. Ist $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$, und beachtet man, dass zur Zeit t_i der Kraftvektor $F(X(t_i))$ auf den Massenpunkt in $X(t_i)$ wirkt, so ist für seine Bewegung von $X(t_i)$ zu $X(t_{i+1})$ durch das Kraftfeld die Arbeit

$$\langle F(X(t_i)), X(t_{i+1}) - X(t_i) \rangle$$

zu verrichten. Summation über t_i liefert die insgesamt verrichtete Arbeit entlang des Polygonzuges $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \langle F(X(t_i)), X(t_{i+1}) - X(t_i) \rangle \quad \underset{X(t_{i+1}) - X(t_i) \approx \dot{X}(t_i)(t_{i+1} - t_i)}{\approx} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \langle F(X(t_i)), \dot{X}(t_i) \rangle (t_{i+1} - t_i)$$

Konvergiert die Feinheit $\delta(Z)$ der Zerlegung gegen 0, also $\delta(Z) \rightarrow 0$, so konvergiert der bei der Approximation gemachte Fehler gegen 0 und die Summe auf der rechten Seite konvergiert gegen das Riemann-Integral

$$\int_a^b \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt.$$

Dieses Integral beschreibt also die vom Massenpunkt entlang des Weges X verrichtete Arbeit.

Definition Es sei $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld, $X : [a, b] \rightarrow D$ stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_a^b \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt$$

das **Wegintegral von F entlang des Weges X** .

Statt $\int_a^b \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt$ schreibt man auch

$$\int_W F dX$$

mit W gleich der Spur von X , also $W = \{X(t) : t \in [a, b]\}$.

Merkhilfe

$$\frac{dX(t)}{dt} = \dot{X}(t) \quad \text{also} \quad dX(t) = \dot{X}(t)dt$$

und

$$\int_W F dX = \int F \dot{X} dt$$

Rechenregeln für Wegintegrale

(i) **Linearität** $\int_W (\alpha F + \beta G) dX = \alpha \int_W F dX + \beta \int_W G dX$

(ii) **Umkehrung der Integrationsrichtung** Bezeichnet $-W$ den Weg W in umgekehrter Richtung, so folgt

$$\int_{-W} F dX = - \int_W F dX$$

(iii) Ist $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und stückweise stetig differenzierbar und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ Zerlegung von $[a, b]$, so dass $X :]t_{i-1}, t_i[\rightarrow \mathbb{R}^n$ fortsetzbar zu stetig differenzierbarer Kurve X_i auf $[t_{i-1}, t_i]$ für $i = 1, \dots, n$, so definiert man

$$\int_W F dX = \sum_{i=1}^n \int_{W_i} F dX_i.$$

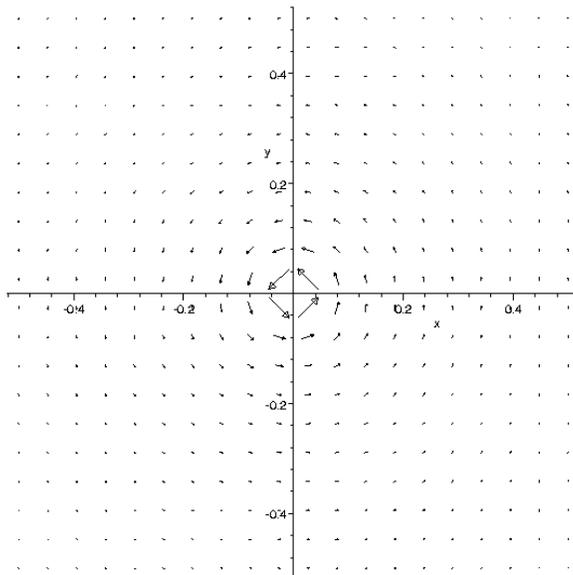
Hierbei bezeichnet W_i die Spur des i -ten Teilstücks X_i .

(iv) $|\int_W F dX| \leq L(X) \max\{\|F(X(t))\| : t \in [a, b]\}$

Interpretation Die gesamte vom Massenpunkt entlang der Kurve X zu verrichtende Arbeit kann abgeschätzt werden durch die Weglänge $L(X)$ multipliziert mit dem Maximum der Beträge der angreifenden Kräfte.

Beispiele 7.1 (i) Isolierter Wirbel

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$



Es sei $X(t) = r \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, der Weg entlang der Kreislinie mit Radius r und Mittelpunkt 0 . Dann gilt

$$\int_W F dX = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt = 2\pi$$

- (ii) Es sei $F(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Wir integrieren F entlang des Weges von 0 nach $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und zwar einmal entlang

$$X_1(t) = \begin{cases} [t, 0]^T & 0 \leq t \leq 1 \\ [1, t-1]^T & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

und einmal entlang

$$X_2(t) = \begin{cases} [0, t]^T & 0 \leq t \leq 1 \\ [t-1, 1]^T & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Dann folgt

$$\int_{W_1} F dX_1 = \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ t^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \int_1^2 \begin{bmatrix} 3(t-1) \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = 1$$

$$\int_{W_2} F dX_2 = \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt + \int_1^2 \begin{bmatrix} 3(t-1)^2 \\ (t-1)^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = \int_1^2 3(t-1)^2 dt = (t-1)^3 \Big|_1^2 = 1$$

Auch entlang des Weges $X_3(t) = t[1, 1]^T$, $t \in [0, 1]$, erhält man

$$\int_{W_3} F dX_3 = \int_0^1 \begin{bmatrix} 3t^3 \\ t^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 4t^3 dt = t^4 \Big|_0^1 = 1$$

Solche Wegintegrale, deren Werte nur von Anfangs- und Endpunkt, nicht aber vom eigentlichen Weg dazwischen abhängen, heißen **wegunabhängig**.

7.2 Potentialfelder

Definition Ein Vektorfeld $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Potentialfeld** (bzw. **konservativ**, bzw. **Gradientenfeld**), falls eine partiell differenzierbare Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $F = \text{grad} \varphi$. φ heißt **Stammfunktion** und $U := -\varphi$ heißt **Potential**.

Das Vorzeichen vor dem Potential U ist dabei so gewählt, dass $F = \text{grad} \varphi = -\text{grad} U$ stets in Richtung des stärksten Potentialabfalls zeigt.

Beispiele 7.2 (i) Das Vektorfeld $F(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{bmatrix}$ aus Beispiel 7.1 (ii) ist ein Potentialfeld, denn

$$F(x, y) = \text{grad} \varphi(x, y) \quad \text{für} \quad \varphi(x, y) = x^3y.$$

(ii) Das Vektorfeld $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ aus Beispiel 7.1 (i) ist ebenfalls ein Potentialfeld, wenn man als Definitionsbereich $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x = 0 \right\}$ wählt, denn:

$$F = \text{grad} \varphi \quad \text{für} \quad \varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Methoden zur praktischen Berechnung einer Stammfunktion φ aus F werden wir später kennenlernen. Zunächst jedoch zeigen wir für Potentialfelder die Wegunabhängigkeit.

Satz (1. Hauptsatz für Kurvenintegrale) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Potentialfeld mit Stammfunktion φ . Weiter seien $A, E \in D$ zwei Punkte. Dann gilt für jede stetig differenzierbare Kurve $X : [a, b] \rightarrow D$ mit $X(a) = A, X(b) = E$:

$$\int_W F dX = \varphi(E) - \varphi(A) \quad (7.1)$$

Beweis Die Funktion $t \mapsto (\varphi \circ X)(t)$, $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar nach t mit Ableitung

$$\frac{d}{dt} (\varphi \circ X)(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X(t)) \dot{x}_i(t) = \text{grad } \varphi(X(t))^T \cdot \dot{X}(t) = F(X(t))^T \cdot \dot{X}(t).$$

Damit ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_W F dX = \int_a^b F(X(t))^T \cdot \dot{X}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\varphi \circ X)(t) dt = \varphi(X(b)) - \varphi(X(a)) = \varphi(E) - \varphi(A).$$

Bemerkungen

(i) Für einen **geschlossenen Weg** ist $\varphi(E) = \varphi(A)$ und damit das Wegintegral

$$\int_W F dX = 0$$

(ii) Für Potentialfelder ist das Wegintegral mit Hilfe der Stammfunktion φ einfach gemäß der Formel (7.1) zu bestimmen.

(iii) Ist φ Stammfunktion von F , so auch $\varphi + c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$

Beispiele 7.3 (i) In der Situation von Beispiel 7.1 (i) ist das Wegintegral $\int_W F dX$ entlang des geschlossenen Weges

$$X(t) = r \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

nicht 0. F ist also kein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Schränkt man den Definitionsbereich von F ein auf $D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x = 0 \right\}$, so ist F jedoch ein Potentialfeld (siehe Beispiel 7.2 (ii)) mit Stammfunktion $\varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Man beachte, dass der Weg X nicht in D_0 verläuft. Es ergibt sich also kein Widerspruch zum Satz.

(ii) $F(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{bmatrix}$ ist Potentialfeld mit Stammfunktion $\varphi(x, y) = x^3y$. Für jeden stetig differenzierbaren Weg $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ von $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ nach $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ gilt also

$$\int_W F dX = \varphi(1, 1) - \varphi(0, 0) = 1.$$

Dies erklärt Beispiel 7.1 (ii).

Für Potentialfelder F sind Wegintegrale besonders einfach mit Hilfe einer zugehörigen Stammfunktion zu berechnen. Es ist daher von großem Interesse, für ein gegebenes Vektorfeld F entscheiden zu können, ob es ein Potentialfeld ist oder nicht.

Wir können ein zugehöriges Entscheidungskriterium wie folgt ableiten: Ist $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$ ein Potentialfeld, also $F = \text{grad } \varphi$ auf D und ist F stetig partiell differenzierbar, so folgt

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

die Stammfunktion φ ist also zweimal stetig partiell differenzierbar und die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar, d.h.

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Damit haben wir eine **notwendige Bedingung** an ein stetig differenzierbares Vektorfeld F gefunden, so dass F Potentialfeld ist. Umgekehrt lässt sich jetzt hieraus auch ein **hinreichendes Kriterium** ableiten.

Definition Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, falls es einen Punkt $S \in M$ gibt, so dass für jedes $x \in M$ die Verbindungsstrecke zwischen S und X

$$\{(1-t)S + tX : t \in [0, 1]\}$$

ganz in M liegt.

Beispiele

- \mathbb{R}^n ist sternförmig, ebenso $U_\varepsilon(X)$ für beliebige $X \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^n \setminus \{X\}$ ist **nicht** sternförmig!

Satz (2. Hauptsatz für Kurvenintegrale) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, $F = [F_1, \dots, F_n]^T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt: F ist ein Potentialfeld, genau dann wenn

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n \quad (7.2)$$

auf D .

Bemerkungen

- (i) Die Bedingung (7.2) heißt **Integrabilitätsbedingung**.
- (ii) Erfüllt F die Integrabilitätsbedingung (7.2), ist D jedoch nicht sternförmig, so kann man den Hauptsatz zumindest auf sternförmige Teilmengen von D (z.B. ε -Umgebungen) anwenden.
- (iii) **Spezialfälle** $n = 2, 3$

$$n = 2$$

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix}$$

Äquivalent zu (7.2) ist $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$n = 3$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

Äquivalent zu (7.2) ist

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$$

Beispiele 7.4 (i) $F(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{bmatrix}$ erfüllt (7.2), denn

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 3x^2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)$$

(ii) $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ erfüllt (7.2) auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, denn

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Folglich ist F ein Potentialfeld auf jeder sternförmigen Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

7.3 Praktische Berechnung von Stammfunktionen

(A) Fall $n = 2$ Gegeben ist

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix}$$

mit der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Gesucht ist eine Funktion φ mit

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Ansatz Aus $P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ folgt

$$\varphi(x, y) = \int P(x, y) dx + g(y)$$

für eine noch zu bestimmende Funktion g . Ist g differenzierbar, so folgt

$$Q(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + g'(y)$$

und Auflösen nach $g'(y)$ liefert

$$g'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx$$

Beispiel

$$F(x, y) = 2 \cos(x^2 + y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung (7.2). Für die Stammfunktion machen wir den Ansatz

$$\varphi(x, y) = \int \underbrace{2x \cos(x^2 + y^2)}_{= \frac{d}{dx} \sin(x^2 + y^2)} dx + g(y) = \sin(x^2 + y^2) + g(y)$$

Dabei ist g zu bestimmen durch

$$g'(y) = 2y \cos(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y} \sin(x^2 + y^2) = 0.$$

Es folgt $g \equiv c$ und somit

$$\varphi(x, y) = \sin(x^2 + y^2) + c.$$

(B) Fall $n = 3$ Gegeben ist

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{bmatrix}$$

mit der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Gesucht ist eine Funktion φ mit

$$F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ansatz Aus $F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ folgt

$$\varphi(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + g(y, z)$$

für eine noch zu bestimmende Funktion $g(y, z)$. Ist g partiell nach y differenzierbar, so folgt

$$F_2(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x, y, z) dx + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z)$$

und somit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = F_2(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x, y, z) dx \quad (7.3)$$

Wegen der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

hängt die rechte Seite von (7.3) nicht von x ab. Wir können also schreiben

$$h(y, z) := F_2(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x, y, z) dx$$

Integrieren von h bzgl. y liefert

$$g(y, z) = \int h(y, z) dy + l(z)$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion l . Einsetzen für g liefert

$$\varphi(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + \int h(y, z) dy + l(z)$$

und ist l differenzierbar, so folgt wegen $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3$ hieraus

$$l'(z) = F_3(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} \int F_1(x, y, z) dx - \frac{\partial}{\partial z} \int h(y, z) dy$$

Beispiel 7.5

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xy + 1 \\ x^2 + z \\ y + 1 \end{bmatrix}$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung (7.2). Es ist $x^2y + x$ ein unbestimmtes Integral $\int F_1(x, y, z) dx$ und damit

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + x + g(y, z).$$

Für die partielle Ableitung $\frac{\partial g}{\partial y}$ haben wir

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = x^2 + z - x^2 = z =: h(y, z)$$

und da zy ein unbestimmtes Integral $\int h(y, z) dy$ ist, folgt

$$g(y, z) = zy + l(z)$$

mit

$$l'(z) = y + 1 - y = 1.$$

Hieraus folgt $l(z) = z + c$, also

$$g(y, z) = zy + z + c$$

und schließlich

$$\varphi(x, y, z) = x^2y + x + zy + z + c.$$

(C) Eine weitere Methode zur praktischen Berechnung von Stammfunktionen die in jeder Dimension funktioniert, ist die **Integration entlang geeigneter Wege**.

Dazu wählt man einen Punkt $A \in D$ aus. Da die Menge D sternförmig bezüglich eines geeigneten Punktes S ist, wählt man für A geeigneterweise einen solchen Punkt S . Andere Punkte aus D sind aber genauso zulässig. Zu gegebenem Punkt $E \in D$ wählt man dann einen beliebigen stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg X in D , der A mit E verbindet:

$$X : [0, 1] \rightarrow D, \quad X(0) = A, \quad X(1) = E.$$

Dann setzt man

$$\varphi(E) := \int F dX \left(= \int_0^1 \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt \right) \quad (7.4)$$

wobei die letzte Gleichheit für stetig differenzierbare Wege X gilt.

Wichtig Das Integral auf der rechten Seite von (7.4) ist **unabhängig** vom gewählten Weg. Dies wird durch die Integrabilitätsbedingung an F und die Sternförmigkeit des Gebietes D erreicht.

Beispiel Wir betrachten nochmal das Beispiel 7.5, also

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xy + 1 \\ x^2 + z \\ y + 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist zu $A = 0$ und $X = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$

$$X(t) = tX, \quad t \in [0, 1]$$

ein 0 mit X verbindender Weg, also

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \int F dX = \int_0^1 \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 ((2t^2xy + 1)x + (t^2x^2 + tz)y + (ty + 1)z) dt \\ &= \frac{2}{3}x^2y + x + \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{2}zy + \frac{1}{2}yz + z \\ &= x^2y + x + zy + z \end{aligned}$$

Stammfunktion zu F .

8 Integrale im \mathbb{R}^n

8.1 Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n

Wir betrachten zunächst im Falle $n = 2$ eine nichtnegative stetige Funktion $f : \underbrace{[a, b] \times [c, d]}_{=I} \rightarrow [0, \infty]$. Wie berechnet man das Volumen V des dreidimensionalen Körpers mit Grundfläche $[a, b] \times [c, d]$, dessen Höhe von dem Funktionsgraphen von f bestimmt wird?

Zur Näherung wähle eine Zerlegung Z von $[a, b] \times [c, d]$ in n Rechtecke I_k der Form

$$I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k] \quad 1 \leq k \leq n$$

die sich bis auf Randpunkte **nicht überlappen** und die ganz $I = [a, b] \times [c, d]$ ausschöpfen, also

$$I = \bigcup_{k=1}^n I_k.$$

Für jedes Teilrechteck I_k sei

- m_k das Minimum von f auf I_k
- M_k das Maximum von f auf I_k

Hierzu bilden wir die **Untersumme** von f bzgl. Z

$$s_f(Z) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot |I_k|$$

wobei $|I_k| =$ Fläche des Rechtecks I_k , also $|I_k| = (b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)$ für $I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$. Somit ist $m_k \cdot |I_k|$ das Volumen des Quaders mit Grundfläche I_k und Höhe m_k

Analog bilden wir die **Obersumme** von f bzgl. Z

$$S_f(Z) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot |I_k|.$$

Dann gilt offensichtlich

$$s_f(Z) \leq V \leq S_f(Z).$$

Verfeinert man Z durch weiteres Unterteilen der Rechtecke I_k , so wächst die Untersumme und fällt die Obersumme.

Es sei

$$\delta(Z) = \text{größte Fläche eines Teilrechtecks von } Z = \max \{|I_k| : 1 \leq k \leq n\}$$

die **Feinheit der Zerlegung** Z .

Lässt man $\delta(Z)$ gegen 0 konvergieren, so konvergieren die Folgen der Untersummen und die Folgen der Obersummen gegen den gemeinsamen Grenzwert V , d.h. es gilt

$$\lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} s_f(Z) = \lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} S_f(Z) = V.$$

Wichtig Der Grenzwert V ist **unabhängig** von der Wahl der Folge der Zerlegungen Z .

Beispiel $f(x, y) = xy$ auf $I = [0, 1] \times [0, 1]$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle Zerlegung in n^2 Teilrechtecke

$$I_{k,l} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \times \left[\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n} \right] \quad 1 \leq k, l \leq n$$

also

$$|I_{k,l}| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Offenbar ist

$$\underbrace{\frac{(k-1)(l-1)}{n^2}}_{=m_{k,l}} \leq f(x, y) \leq \underbrace{\frac{kl}{n^2}}_{=M_{k,l}} \quad \text{auf } I_{k,l}$$

und damit

$$\begin{aligned} s_f(Z) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \underbrace{m_{k,l}}_{=\frac{(k-1)(l-1)}{n^2}} \cdot \underbrace{|I_{k,l}|}_{=\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (k-1)(l-1) \\ &= \frac{1}{n^4} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} kl}_{=(\frac{1}{2}(n-1)n)^2} = \frac{1}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2} \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$S_f(Z) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \underbrace{M_{k,l}}_{=\frac{kl}{n^2}} \underbrace{|I_{k,l}|}_{=\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^4} \underbrace{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n kl}_{=(\frac{1}{2}(n+1)n)^2} = \frac{1}{n^4} = \frac{1}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2} \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wir können den Fall $n = 2$ auf allgemeine Dimensionen übertragen: Für Punkte

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit $a_i \leq b_i$ definieren wir das abgeschlossene n -**dim. Rechteck**

$$\begin{aligned} I := [A, B] &:= \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für } 1 \leq i \leq n \right\} \\ &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]. \end{aligned}$$

Mit $|I| := \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ bezeichnen wir das n -**dimensionale Volumen** des Rechtecks I . Eine Zerlegung Z von $[A, B]$ ist eine endliche Folge von Rechtecken I_1, \dots, I_N , die sich bis auf Randpunkte nicht überlappen und für die gilt

$$[A, B] = \bigcup_{k=1}^N I_k.$$

Zur Zerlegung Z bilden wir die **Untersumme von f**

$$s_f(Z) = \sum_{k=1}^N m_k \cdot |I_k|$$

und die **Obersumme von f**

$$S_f(Z) = \sum_{k=1}^N M_k \cdot |I_k|$$

wobei

$$m_k = \text{Minimum von } f \text{ auf } I_k$$

$$M_k = \text{Maximum von } f \text{ auf } I_k$$

Wie im Falle $n = 2$ sei

$$\delta(Z) = \text{größtes } n\text{-dim Volumen eines Teilrechtecks von } Z = \max\{|I_k| : 1 \leq k \leq N\}$$

die **Feinheit der Zerlegung Z** .

Definition Es sei $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Gilt dann

$$V = \lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} s_f(Z) = \lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} S_f(Z)$$

so heißt f (**Riemann-**) **integrierbar (auf $[A, B]$)** und der gemeinsame Grenzwert V der Unter- bzw. Obersumme heißt das (**Riemann-**) **Integral von f (auf $[A, B]$)**.

Schreibweise

$$\int_{[A,B]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) := V$$

Satz Es sei $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig (d.h., es gibt eine Zerlegung $[A, B] = \bigcup_{k=1}^m [A_k, B_k]$, so dass f auf $]A_k, B_k[$ stetig und stetig fortsetzbar auf $[A_k, B_k]$ für alle k). Dann ist f Riemann-integrierbar.

Rechenregeln

(i) **Linearität**

$$\begin{aligned} & \int_{[A,B]} (\alpha f(x_1, \dots, x_n) + \beta g(x_1, \dots, x_n)) d(x_1, \dots, x_n) \\ &= \alpha \int_{[A,B]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) + \beta \int_{[A,B]} g(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

(ii) **Additivität** Für $[A, B] = I_1 \cup I_2$, wobei I_1, I_2 bis auf Randpunkte disjunkte Rechtecke, gilt

$$\begin{aligned} \implies \int_{[A,B]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) &= \int_{I_1} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \int_{I_2} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

(iii) **Monotonie** $f \leq g$ auf $[A, B]$

$$\implies \int_{[A,B]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \leq \int_{[A,B]} g(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

8.2 Praktische Berechnung - iterierte Integrale

$n = 2$: Es sei $f : \underbrace{[a, b] \times [c, d]}_{=I} \rightarrow \mathbb{R}$ (Riemann-) integrierbar.

Dann gilt

- Existiert für alle $x \in [a, b]$ das Riemann-Integral

$$\int_c^d f(x, y) dy$$

so existiert das iterierte Integral

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

- Analog gilt: existiert für alle $y \in [c, d]$ das Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

so existiert das iterierte Integral

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Bemerkungen

- Die Voraussetzungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn f stetig ist auf $I = [a, b] \times [c, d]$.
- Hat $f(x, y) = g(x)h(y)$ Produktform und sind g, h integrierbar (z.B. stetig), so ist

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_I g(x)h(y) d(x, y) = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy.$$

- Durch Induktion nach n können auch n -dimensionale Integrale durch iterierte Integrale praktisch berechnet werden: obige Aussagen lassen sich sinngemäß auf den Fall $n \geq 3$ übertragen.

Beispiele

(i) $\int_I \cos(2x + y) d(x, y)$ für $I = [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos(2x + y)$ ist stetig auf I , also integrierbar, und damit gilt

$$\begin{aligned} \int_I \cos(2x + y) d(x, y) &= \int_0^\pi \left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x + y) dy}_{=\sin(2x+y)|_0^{\frac{\pi}{2}}} \right) dx \\ &= \int_0^\pi \left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2x) \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \cos(2x) \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \frac{1}{2} \underbrace{\cos 0}_{=1} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Es sei $I = [0, 1] \times [0, 2]$. Dann gilt mit $g(x) = x^2$ und $h(y) = y$

$$\int_I \underbrace{x^2 y}_{=g(x)h(y)} d(x, y) = \int_0^1 g(x) dx \cdot \int_0^2 h(y) dy = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

(iii) Es sei $I = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_I \underbrace{e^{2x+y+3z}}_{=e^{2x} \cdot e^y \cdot e^{3z}} d(x, y, z) &= \int_0^1 e^{2x} dx \cdot \int_0^2 e^y dy \cdot \int_0^3 e^{3z} dz \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 \cdot e^y \Big|_0^2 \cdot \frac{1}{3} e^{3z} \Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{2} (e^2 - 1) \cdot (e^2 - 1) \cdot \frac{1}{3} (e^9 - 1). \end{aligned}$$

• Es sei $I = [0, 1]^3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_I (x + y + z)^2 d(x, y, z) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\underbrace{\int_0^1 (x + y + z)^2 dz}_{=\frac{1}{3}[(x+y+1)^3 - (x+y)^3]} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{12} [(x+2)^4 - 2(x+1)^4 + x^4] dx \\ &= \frac{1}{60} [(x+2)^5 \Big|_0^1 - 2(x+1)^5 \Big|_0^1 + x^5 \Big|_0^1] \\ &= \frac{1}{60} (3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3) = \frac{150}{60} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

8.3 Das Riemann-Integral über kompakte Mengen

Statt n -dimensionale Rechtecke $[A, B]$ kann man Funktionen auch über kompakte Mengen integrieren. Dazu definieren wir zu gegebener Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$1_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in K \\ 0 & \text{falls } x \notin K \end{cases}$$

Die Funktion 1_K heißt **Indikatorfunktion** oder **charakteristische Funktion** der Menge K .

Definition Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $I_K = [A, B]$ das kleinste n -dimensionale Rechteck, das K enthält. Ist dann die Funktion

$$f \cdot 1_K : I_K \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in K \\ 0 & \text{für } x \in I_K \setminus K \end{cases}$$

Riemann-integrierbar auf I_K , so heißt f (**Riemann-**) **integrierbar auf K** und man setzt

$$\int_K f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) := \int_{I_K} (f \cdot 1_K)(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

Linearität und **Monotonie** des Riemann-Integrals über n -dimensionale Rechtecke übertragen sich auf Integrale über kompakten Mengen. Darüber hinaus gilt die

Additivität Ist f integrierbar auf den kompakten Mengen K_1, K_2 , so ist f auch integrierbar auf $K_1 \cup K_2$. Sind K_1 und K_2 **nicht überlappend**, d.h. haben sie höchstens Randpunkte gemeinsam, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{K_1 \cup K_2} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) &= \int_{K_1} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \int_{K_2} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Ein kompakte Menge K , für die insbesondere ihre charakteristische Funktion 1_K integrierbar ist, heißt **messbar**. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $K \subset \mathbb{R}^n$ messbar, so ist f **Riemann-integrierbar über K** .

Bemerkung Für $f \equiv 1$, also $f(x_1, \dots, x_n) = 1$, lässt sich

$$\int_K 1 d(x_1, \dots, x_n)$$

als n -dimensionales Volumen der Menge K interpretieren. Ist K messbar und $\int_K 1 d(x_1, \dots, x_n) = 0$, so heißt K **Nullmenge**.

Beispiele für Nullmengen

Jedes n -dimensionale Rechteck der Form

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times \{a_i\} \times \dots \times [a_n, b_n]$$

also jedes n -dimensionale Rechteck, bei dem eine oder mehr Seiten zu einem Punkt zusammengezogen sind, ist eine Nullmenge, denn

$$\int_I 1 d(x_1, \dots, x_n) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_i - a_i) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n) = 0.$$

Einzelne Punkte sind Nullmengen, ebenso Vereinigungen von Nullmengen, d. h.

$$K_1, K_2 \text{ Nullmengen} \Rightarrow K_1 \cup K_2 \text{ ebenfalls Nullmenge.}$$

Ist K kompakt, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist der Funktionsgraph

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in K\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

eine **Nullmenge**.

Wichtig Ist K eine Nullmenge und f integrierbar auf K , so ist

$$\int_K f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

8.4 Praktische Berechnung über Normalbereiche

(A) Normalbereiche im \mathbb{R}^2

Definition Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge.

(i) K heißt **y-projizierbar**, falls es zwei stetige Funktionen $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : g(x) \leq y \leq h(x), x \in [a, b] \right\}$$

(ii) K heißt **x-projizierbar**, falls zwei stetige Funktionen $l, r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ existieren mit

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : l(y) \leq x \leq r(y), y \in [c, d] \right\}$$

(iii) Ist K x - oder y -projizierbar, so heißt K ein **Normalbereich**.

(iv) K heißt **regulär**, falls die berandenden Funktionen g, h (bzw. l, r) stetig differenzierbar sind.

Satz Ist K ein Normalbereich und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar auf K und es gilt mit den Bezeichnungen obiger Definition:

- Falls K y -projizierbar ist:

$$\int_K f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

- Falls K x -projizierbar ist:

$$\int_K f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_{r(y)}^{l(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Beispiele 8.1 (i) Fläche eines Kreisringes mit innerem Radius r und äußerem Radius R

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : r \leq \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq R \right\}$$

K ist kein Normalbereich, jedoch können wir K in zwei nur am Rand überlappende Normalbereiche gleicher Größe aufteilen: $K = K_+ \cup K_-$ mit

$$K_{\pm} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : r \leq \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq R, \pm y \geq 0 \right\}.$$

K_+ (bzw. K_-) sind y -projizierbar mit

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-R, -r] \\ \sqrt{r^2 - x^2} & \text{für }]-r, r[\\ 0 & \text{für } x \in [r, R] \end{cases}$$

und $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ für $x \in [-R, R]$ für K_+ . Folglich beträgt die Fläche A_+ der oberen Hälfte

$$\begin{aligned} A_+ &= \int_{-R}^{+R} \left(\underbrace{\int_{g(x)}^{h(x)} 1_{K_+}(x, y) dy}_{h(x) - g(x)} \right) dx = \int_{-R}^{+R} h(x) - g(x) dx \\ &= \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} dx - \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} R^2 - \frac{\pi}{2} r^2 = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

Folglich ist die Fläche des Kreisringes K gleich $\pi(R^2 - r^2)$.

- (ii) **Berechnung von Schwerpunkten** Für eine messbare kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ist der Schwerpunkt $\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}$ definiert durch

$$x_s = \frac{1}{|K|} \int_K x d(x, y).$$

Hierbei bezeichnet $|K|$ die Fläche von K , also

$$|K| = \int_K 1 d(x, y).$$

Ist K speziell ein Normalbereich der Form

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : 0 \leq y \leq h(x), x \in [a, b] \right\}$$

so errechnet man als Schwerpunkt

$$x_s = \frac{1}{|K|} \left(\int_a^b \underbrace{\int_0^{h(x)} x \, dy}_{xh(x)} \right) dx = \frac{1}{|K|} \int_a^b xh(x) \, dx$$

$$y_s = \frac{1}{|K|} \int_a^b \left(\underbrace{\int_0^{h(x)} y \, dy}_{\frac{1}{2}h(x)^2} \right) dx = \frac{1}{2|K|} \int_a^b (h(x))^2 \, dx.$$

Der geometrische Schwerpunkt eines solchen Normalbereiches ist also der Punkt

$$\frac{1}{|K|} \left[\begin{array}{c} \int_a^b xh(x) \, dx \\ \frac{1}{2} \int_a^b (h(x))^2 \, dx \end{array} \right] = \frac{1}{\int_a^b h(x) \, dx} \left[\begin{array}{c} \int_a^b xh(x) \, dx \\ \frac{1}{2} \int_a^b (h(x))^2 \, dx \end{array} \right]$$

Speziell Schwerpunkt eines Halbkreises mit Radius R

$$h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R, R]$$

$$x_s = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} x \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = 0$$

$$y_s = \frac{2}{\pi R^2} \frac{1}{2} \int_{-R}^{+R} R^2 - x^2 \, dx = \frac{1}{\pi R^2} [2R^3 - \frac{2}{3}R^3] = \frac{4R}{3\pi}$$

Der geometrische Schwerpunkt hat also die Koordinaten $\left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \end{array} \right]$

(B) Normalbereiche im \mathbb{R}^3

Im folgenden betrachten wir Normalbereiche $K \subset \mathbb{R}^3$. Räumliche Normalbereiche sind analog definiert zum zweidimensionalen Fall:

Definition Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge. K heißt **Normalbereich bzgl. der xy -Ebene**, wenn es

- zwei stetige Funktionen $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sowie
- zwei stetige Funktionen $u, v : A := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ; g(x) \leq y \leq h(x), x \in [a, b] \right\} \rightarrow \mathbb{R}$

gibt, so dass

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : u(x, y) \leq z \leq v(x, y), \underbrace{g(x) \leq y \leq h(x)}_{=A}, x \in [a, b] \right\}.$$

Entsprechend definiert man Normalbereiche bzgl. der xz -Ebene und bzgl. der yz -Ebene.

Sind die berandenden Funktionen g, h und u, v zudem stetig differenzierbar, so spricht man von **regulären Normalbereichen**.

Beispiel Eine Kugel

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

ist ein Normalbereich bzgl. der xy -Ebene mit

$$g(x) = -h(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} \text{ auf } [-R, R]$$

$$u(x, y) = -v(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Weitere Beispiele für Normalbereiche sind Quader.

Satz (Integration über räumliche Normalbereiche)

Ist K ein räumlicher Normalbereich bezgl. der xy -Ebene und ist $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar über K und es gilt mit den Bezeichnungen der obigen Definition:

$$\int_K f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Beispiel Volumen V der Kugel K mit Radius R

$$\begin{aligned} V &= \int_K 1 d(x, y, z) = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1 dz dy dx \\ &= 2 \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy dx \\ &= \pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Anmerkung Einfacher gelingt die Berechnung des Volumens mit Hilfe von Kugelkoordinaten (siehe Abschnitt 8.6).

8.5 Der Gaußsche Integralsatz für die Ebene

Der Gaußsche Integralsatz stellt eine Beziehung zwischen einem Doppelintegral über ein Gebiet und einem Wegintegral längs dessen Randkurve her.

Zur Erinnerung Ein Normalbereich $K \subset \mathbb{R}^2$ heißt **regulär**, falls die berandenden Funktionen $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $l, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) stetig differenzierbar sind.

Ist K ein regulärer Normalbereich, so lässt sich der Rand ∂K von K durch stetig differenzierbare Kurven parametrisieren.

Beispiel K y -projizierbar, also

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : g(x) \leq y \leq h(x), x \in [a, b] \right\}$$

Wir können als Parametrisierung des Randes also die Zusammensetzung der vier Kurven

$$\begin{aligned} X_1(t) &:= [t, g(t)]^T \text{ für } t \in [a, b], & X_2(t) &:= [b, t h(b) + (1-t) g(b)]^T \text{ für } t \in [0, 1] \\ X_3(t) &:= [t, h(t)]^T \text{ für } t \in [a, b], & X_4(t) &:= [a, t h(a) + (1-t) g(a)]^T \text{ für } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

wählen. Es gibt also einen stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg X , der den Rand von K **positiv orientiert** durchläuft. Dabei bedeutet positiv orientiert, dass der Rand entgegen des Uhrzeigersinns durchlaufen wird, d.h. beim Durchlaufen des Randes liegt das Gebiet immer links. Das bedeutet in diesem Falle, dass die Wege W_3 und W_4 zu X_3 und X_4 in umgekehrter Richtung durchlaufen werden müssen, dh

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} F dX &= \int_{W_1} F dX + \int_{W_2} F dX + \int_{-W_3} F dX + \int_{-W_4} F dX \\ &= \int_{W_1} F dX + \int_{W_2} F dX - \int_{W_3} F dX - \int_{W_4} F dX. \end{aligned}$$

Satz (Gaußscher Integralsatz für die Ebene)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ wie oben, $F = [F_1, F_2]^T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbares Vektorfeld, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ offene Teilmenge, die K enthält, also $K \subset D$. Dann gilt

$$\int_K \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y) = \int_{\partial K} F dX \quad (8.1)$$

wobei der Rand ∂K von K positiv orientiert zu durchlaufen ist.

Beispiel Berechnung der Fläche von K

K und $X(t) = [x(t), y(t)]^T$ wie im Satz. Dann folgt

$$\begin{aligned} \text{Fläche von } K = |K| &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \cdot dX \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b x(t) \dot{y}(t) - y(t) \dot{x}(t) dt \end{aligned} \quad (8.2)$$

Merkregel Mit $dx(t) = \dot{x}(t) dt$ und $dy(t) = \dot{y}(t) dt$ folgt

$$|K| = \frac{1}{2} \int_{\partial K} x dy - y dx$$

Herleitung von (8.2) Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf $F(x, y) = [-y, x]^T$ liefert, wegen $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2$,

$$\int_K \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y) = 2 \cdot \text{Fläche von } K.$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz lässt sich also der Flächeninhalt von K als Wegintegral entlang des Randes ∂K berechnen.

Illustration

- (i) Ellipse K mit Hauptachsen der Länge $2a$ und $2b$ für $a, b > 0$

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

K ist ein Normalbereich und darstellbar in der Form

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : g(x) \leq y \leq h(x), x \in [-a, a] \right\}$$

mit

$$g(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = -h(x).$$

Eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes ist somit

$$X(t) = \begin{bmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

also $\langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle = ab$ und daher

$$\text{Fläche der Ellipse} = \frac{1}{2} \int_{\partial K} F dX = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

- (ii) Hypozykloide K mit Randkurve

$$X(t) = \begin{bmatrix} (\cos t)^3 \\ (\sin t)^3 \end{bmatrix} \quad \text{also} \quad \dot{X}(t) = 3 \begin{bmatrix} -\sin t (\cos t)^2 \\ \cos t (\sin t)^2 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Folglich

$$\begin{aligned} |K| &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \cdot dX \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3 \left((\sin t)^4 (\cos t)^2 + (\sin t)^2 (\cos t)^4 \right) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 (\cos t)^2 dt = \frac{3}{8} \pi \end{aligned}$$

Ist $X = [x, y]^T$ wie oben eine positive orientierte stetig differenzierbare Parametrisierung des Randes, so beschreibt

$$N(t) = \frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

die (äußere) Normale an K im Punkte $X(t)$.

Ist dann $\hat{F} = \begin{bmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{bmatrix}$, so folgt

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \operatorname{div} \hat{F}, \quad \langle \hat{F}(X(t)), N(X(t)) \rangle \|\dot{X}(t)\| = \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle$$

(mit $\operatorname{div} \hat{F}(x, y) = \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial y}(x, y)$) und damit bekommt der Gaußsche Integralsatz (8.1) die Form

$$\int_K \operatorname{div} \hat{F}(x, y) d(x, y) = \int_{\partial K} \langle \hat{F}, N \rangle dX$$

Wir werden den Satz in dieser Form auf räumliche Bereiche im letzten Kapitel verallgemeinern.

8.6 Die Substitutionsregel

Die Substitutionsregel für das eindimensionale Riemann-Integral besagt, dass

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

für eine stetig differenzierbare Funktion g . Ist $g' > 0$ (oder $g' < 0$), so können wir diese Identität auch wie folgt schreiben:

$$\int_{[a,b]} f(g(x))|g'(x)|dx = \int_{g([a,b])} f(y)dy$$

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist eine Verallgemeinerung auf n -dimensionale Riemann-Integrale. Dabei ersetzen wir $[a, b]$ durch eine kompakte messbare Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und g durch eine Abbildung

$$g := \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} : U \rightarrow V$$

mit folgenden Eigenschaften:

- U, V offen,
- g ist bijektiv,
- g und die Umkehrabbildung $g^{-1} : V \rightarrow U$ sind stetig differenzierbar.

Mit $J_g(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ bezeichnen wir die Funktionalmatrix der Abbildung g . Dann heißt die Determinante der Funktionalmatrix

$$\det J_g(x)$$

die **Funktionaldeterminante**.

Satz (Substitutionsregel): In der obigen Situation sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $K \subset V$. Dann folgt

$$\int_K f(y_1, \dots, y_n) d(y_1, \dots, y_n) = \int_{g^{-1}(K)} f(g(x_1, \dots, x_n)) |\det J_g(x_1, \dots, x_n)| d(x_1, \dots, x_n)$$

Hierbei bezeichnet

$$g^{-1}(K) = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : g(X) \in K \right\}$$

die **Urbildmenge von K** unter der Abbildung g .

Wichtige Spezialfälle

(A) Polarkoordinaten (im \mathbb{R}^2)

$$U =]0, \infty[\times]0, 2\pi[, \quad V = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : y = 0, x \geq 0 \right\}, \quad g : U \rightarrow V, \quad \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$J_g(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad |\det J_g(r, \varphi)| = r$$

Ist also $K \subset V$ kompakt, und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so folgt

$$\int_K f(x, y) d(x, y) = \int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi)$$

Beispiel K sei halbes Kreissegment mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 .

In Polarkoordinaten gilt

$$g^{-1}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} : R_1 \leq r \leq R_2, \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right] \right\} = [R_1, R_2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right]$$

Folglich ist

$$\int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) = \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \right) r dr$$

Etwa $f(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, also

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = e^{-\frac{r^2}{2}}$$

ergibt

$$\int_{g^{-1}(K)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d(x, y) = \int_{R_1}^{R_2} \pi e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \pi \left(e^{-\frac{R_1^2}{2}} - e^{-\frac{R_2^2}{2}} \right)$$

(B) Kugelkoordinaten (im \mathbb{R}^3)

$$U =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$g(r, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

Geometrische Deutung der Variablen

- r = Länge des Ortsvektors \vec{P} zu P
- θ = Winkel von \vec{P} mit der (x, y) -Ebene ("geographische Breite")
- φ = Winkel von der Projektion von \vec{P} auf die (x, y) -Ebene mit der x -Achse ("geographische Länge")

g ist eine Bijektion auf die Menge $V = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : y = 0, x \geq 0 \right\}$

$$J_g(r, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\det J_g(r, \varphi, \theta)| &= |r^2(\cos \varphi)^2(\cos \theta)^3 + r^2(\sin \varphi)^2(\sin \theta)^2 \cos \theta + r^2(\cos \varphi)^2(\sin \theta)^2 \cos \theta \\ &\quad + r^2(\sin \varphi)^2(\cos \theta)^3| \\ &= r^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Ist also $K \subset V$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so folgt

$$\int_K f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \cos \theta d(r, \varphi, \theta)$$

Beispiel 8.2 K sei halbe Kugelschale mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 . In Kugelkoordinaten gilt:

$$g^{-1}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{bmatrix} : R_1 \leq r \leq R_2, \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\} = [R_1, R_2] \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Zwar liegt $g^{-1}(K)$ nicht ganz in U , die Ausnahmemenge $g^{-1}(K) \setminus U$ ist aber eine Nullmenge und somit ändert sich der Wert des Integrals nicht. Für eine stetige Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich aufgrund der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int_K f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \cos \theta d(r, \varphi, \theta) \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta d\theta \right) d\varphi \right) r^2 dr \end{aligned}$$

Für das Volumen ergibt sich etwa (Integration von 1_K).

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta d\varphi r^2 dr = \frac{2}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$$

Für das Volumen der Hohlkugel erhält man entsprechend

$$V = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3).$$

Für $R_1 = 0$ erhält man hieraus als Spezialfall das Volumen der Kugel mit Radius R :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

(C) Zylinderkoordinaten (im \mathbb{R}^3)

$$U =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$$

$$g(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}$$

ist Bijektion auf die Menge

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : y = 0, x \geq 0 \right\}$$

In Zylinderkoordinaten kann ein Zylinder Z mit Radius R und Höhe H also ganz einfach beschrieben werden als Menge

$$Z = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H].$$

Für die Funktionalmatrix gilt

$$J_g(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und für die Funktionaldeterminante erhält man

$$|\det J_g(r, \varphi, z)| = r.$$

Für eine stetige Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, mit $K \subset V$ kompakt, ergibt sich

$$\int_K f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z).$$

Beispiel 8.3 K sei ein Ausschnitt mit Öffnungswinkel φ_0 aus einem Hohlzylinder der Höhe H mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 , also in Zylinderkoordinaten

$$g^{-1}(K) = [R_1, R_2] \times [0, \varphi_0] \times [0, H].$$

Für die Ausnahmemenge $g^{-1}(K) \setminus U$ gilt dieselbe Bemerkung wie im letzten Beispiel 8.2.

Für das Volumen des Zylinderausschnitts erhält man etwa

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\varphi_0} \int_0^H r dz d\varphi dr = \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) \varphi_0 H.$$

Für $R_1 = 0$, $\varphi_0 = 2\pi$ bekommt man als Spezialfall das Volumen des Vollzylinders mit Radius R und Höhe H

$$V = \pi R^2 H.$$

Beispiel 8.4 Volumen eines Rotationskörpers

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$. Durch Drehung des Funktionsgraphen von f um die x -Achse erhält man einen **Rotationskörper** K . f heißt die **Kontur** des Rotationskörpers. Als Punktmenge ist K gegeben durch

$$K = \{[x, y, z]^T : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Zur Beschreibung von Rotationskörpern eignen sich die folgenden Zylinderkoordinaten ganz besonders:

$$g(x, r, \varphi) = [x, r \cos \varphi, r \sin \varphi]^T.$$

In diesen Koordinaten ist der Rotationskörper K nämlich gegeben durch

$$g^{-1}(K) = \{[x, r, \varphi]^T : x \in [a, b], r \in [0, f(x)], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Hält man den Winkel φ fest, etwa $\varphi = \varphi_0$, so erhält man als Menge aller Punkte aus $g^{-1}(K)$ mit diesem Winkel die Menge

$$g^{-1}(K)_{\varphi_0} = \{[x, r, \varphi_0]^T : x \in [a, b], r \in [0, f(x)]\}$$

und diese ist ein Normalbereich (r -projizierbar). Es folgt

$$\int_{g^{-1}(K)_{\varphi_0}} r d(x, r) = \int_a^b \int_0^{f(x)} r dr dx = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Integriert man schließlich noch über alle Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$, so erhält man das Volumen V des Rotationskörpers:

$$\begin{aligned} V &= \int_K 1_K(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{g^{-1}(K)} \underbrace{\det J_g(x, r, \varphi)}_{=r} d(x, r, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{g^{-1}(K)_{\varphi}} r d(x, r) \right) d\varphi = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Das Volumen V des Rotationskörpers mit Kontur f beträgt also

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Illustrationen

- (i) **Kreiskegel** Ein Kreiskegel der Höhe h und Grundfläche mit Radius r besitzt die Kontur $f(x) = \frac{r}{h}x$ auf $[0, h]$. Als Volumen ergibt sich

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi r^2 \frac{h}{3}.$$

- (ii) **Kühlturm** Der Rotationskörper zur Kontur $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ auf $[-1, 1]$ hat die Form eines Kühlturmes. Als Volumen errechnet man

$$V = \pi \int_{-1}^1 (\cosh(x))^2 dx = \pi \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \pi \left(1 + \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2})\right).$$

Statt einer Kontur können wir auch ganze Flächen F um die x -Achse rotieren lassen. Für das Volumen V des so entstandenen Rotationskörpers gilt die Formel:

$$V = 2\pi r_0 |F|.$$

Hierbei bezeichnet r_0 den Abstand des Schwerpunktes von F zur Drehachse, also

$$r_0 = \frac{1}{|F|} \int_F y d(x, y).$$

Beispiel Torus (oder auch Volls Schlauch, Reifen) Der Torus entsteht durch Rotation eines Kreises. Es sei r der Radius dieses Kreises, also $|F| = \pi r^2$, und der Mittelpunkt liege in der xy -Ebene und habe die Koordinaten $[0, R, 0]^T$. Da dieser mit dem Schwerpunkt des Kreises übereinstimmt, beträgt der Abstand r_0 des Schwerpunktes zur x -Achse $r_0 = R$, also

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

9 Vektoranalysis

9.1 Divergenz und Rotation

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F = [F_1, \dots, F_n]^T$ sei stetig differenzierbares Vektorfeld. Unter der **Divergenz des Vektorfeldes F** versteht man den Ausdruck

$$\operatorname{div} F(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(X), \quad X \in D.$$

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F = [F_1, F_2, F_3]^T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Unter der **Rotation des Vektorfeldes F** versteht man den Ausdruck

$$\operatorname{rot} F(X) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(X) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(X) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(X) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(X) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(X) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X) \end{bmatrix}.$$

Merkhilfen

$$\operatorname{div} F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} F_1(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{bmatrix} \quad \operatorname{rot} F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \\ F_3(X) \end{bmatrix}$$

Man beachte, dass $\operatorname{rot} F = 0$ äquivalent ist zur Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

(siehe (7.2)). Insbesondere ist die Rotation eines Gradientenfeldes $F = \operatorname{grad} \varphi$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion φ gleich 0. In diesem Sinne misst $\operatorname{rot} F$ die Abweichung des Vektorfeldes F von einem Gradientenfeld.

Geometrische Bedeutung der Rotation

Eine starre Drehung um die durch einen Richtungsvektor \vec{a} beschriebene Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω wird beschrieben durch die Abbildung

$$F : x \mapsto \omega a \times x = \omega \begin{bmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{bmatrix}.$$

Die zugehörige Abbildungsmatrix lautet also

$$A = \omega \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

und diese Matrix ist schiefssymmetrisch: $A^T = -A$.

Es sei nun $F = [F_1, F_2, F_3]^T$ ein beliebiges differenzierbares Vektorfeld. Zu gegebenem Punkt X_0 ist dann die lineare Approximation von F in X_0 gegeben durch

$$X \mapsto X_0 + J_F(X_0)(X - X_0).$$

Beachte nun, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(X_0) \times (X - X_0) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} (X - X_0) \\ &= (J_F(X_0) - J_F(X_0)^T)(X - X_0). \end{aligned}$$

$\operatorname{rot} F(X_0)$ beschreibt also den schiefsymmetrischen Anteil der linearen Approximation des Vektorfeldes F in X_0 . Diesen können wir als starre Drehung um die durch $\operatorname{rot} F(X_0)$ beschriebene Achse auffassen.

Bemerkungen

(i) **Laplace-Operator** Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar, so folgt

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(X)) = \operatorname{div} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X)$$

Die Zuordnung $f \mapsto \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(X))$ heißt Laplace-Operator. Statt $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(X))$ schreibt man auch $\Delta f(X)$.

(ii) Ist $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Gradientenfeld, also $F(X) = \operatorname{grad} f(X)$ für eine Funktion f , und ist f zweimal stetig differenzierbar, so folgt aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen von f

$$\operatorname{rot} F(X) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f(X)) = 0.$$

Es gilt also: Jedes stetig differenzierbare Potentialfeld hat Rotation 0.

(iii) Ist $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar, so folgt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F(X)) = 0.$$

9.2 Integration über Flächen

Definition Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und die abgeschlossene Hülle $\bar{D} := D \cup \partial D$ sei messbar und kompakt. Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\bar{D} \subset G$, und

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$$

sei stetig differenzierbar und die Matrix

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(X) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(X) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(X) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(X) \end{bmatrix}$$

habe für alle $X = [x, y]^T \in \bar{D}$ vollen Rang (d.h. Rang 2, d.h. die Spaltenvektoren sind linear unabhängig).

Dann heißt F **reguläre Fläche (über \bar{D})** und die Punktmenge

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 = F_1(X), x_2 = F_2(X), x_3 = F_3(X) \text{ für ein } X \in \bar{D} \right\}$$

heißt **reguläres Flächenstück**.

Beispiel 9.1 Kugeloberfläche im \mathbb{R}^3

$$F(X) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{bmatrix} \text{ auf } G = \{X : \|X\| < R\}$$

ist stetig differenzierbar und

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix}$$

hat für alle $X \in G$ vollen Rang. Es sei $D = \{X : \|X\| < R - \varepsilon\}$ für ein $\varepsilon \in]0, R[$, also $\bar{D} = \{X : \|X\| \leq R - \varepsilon\}$. Dann ist

$$F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eine reguläre Fläche.

Es sei F eine reguläre Fläche über \bar{D} . Für $X \in \bar{D}$ heißt die durch die Vektoren

$$F_x(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(X) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(X) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(X) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad F_y(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial F_3}{\partial y}(X) \end{bmatrix}$$

aufgespannte Ebene

$$T(X) : F(X) + \lambda F_x(X) + \mu F_y(X), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Tangentialebene an die Fläche F im Punkte X . Der hierzu orthogonale Vektor

$$N(X) := \frac{1}{\|F_x(X) \times F_y(X)\|} F_x(X) \times F_y(X), \quad X \in \bar{D}$$

heißt **Normalenvektor** an die Fläche F im Punkte X .

Beispiel 9.2 In der Situation des Beispiels 9.1 ist

$$F_x(X) \times F_y(X) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

also

$$N(X) = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}.$$

Die Tangentialebene $T(X)$ im Punkte X wird durch die Vektoren $F_x(X)$ und $F_y(X)$ aufgespannt. Der Flächeninhalt des von $F_x(X)$ und $F_y(X)$ aufgespannten Parallelogramms ist gerade $\|F_x(X) \times F_y(X)\|$. Dies motiviert:

Definition Es sei F reguläre Fläche über \bar{D} ,

$$H : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig.}$$

Dann heißt

$$\int_{\bar{D}} H(F(x, y)) \|F_x(x, y) \times F_y(x, y)\| d(x, y) =: \int_{\mathcal{F}} H d\sigma$$

das **Oberflächenintegral** von H über der Fläche F .

Insbesondere heißt

$$\int_{\mathcal{F}} d\sigma = \int_{\bar{D}} \|F_x(x, y) \times F_y(x, y)\| d(x, y)$$

der **Flächeninhalt** der Fläche F .

Beispiel 9.3 In der Situation des Beispiels 9.1 ist

$$\|F_x(X) \times F_y(X)\|^2 = \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Für die Oberfläche der Halbkugel \mathcal{F} ergibt sich damit

$$\int_{\mathcal{F}} d\sigma = \int_G \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d(x, y)$$

mit $G = \{[x, y]^T : x^2 + y^2 < R^2\}$. Zur Berechnung des Integrals auf der rechten Seite wählen wir Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2 :

$$g(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix},$$

also $g^{-1}(G) =]0, R[\times]0, 2\pi[$, und damit

$$\begin{aligned} \int_G \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d(x, y) &= \int_{g^{-1}(G)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r d(r, \varphi) \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{rR}{\sqrt{R^2 - r^2}}}_{= -\frac{d}{dr} R\sqrt{R^2 - r^2}} d\varphi dr = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Die Oberfläche der Halbkugel mit Radius R beträgt somit $2\pi R^2$ und die Oberfläche der Kugel mit Radius R somit $4\pi R^2$.

9.3 Integralsätze

Satz (Gaußscher Integralsatz für den R^3) Es sei $K \subset R^3$ ein regulärer Normalbereich, $K \subset G$, G offen, $H : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld und $N : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^3$ äußere Normale des Randes ∂K , so gilt

$$\int_K \operatorname{div} H \, d(x, y, z) = \int_{\partial K} \langle H, N \rangle \, d\sigma.$$

Beispiel 9.4 (i) Wir berechnen den Fluss $\int_{\partial K} \langle H, N \rangle \, d\sigma$ des Vektorfeldes

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2z \\ x + y \\ 0 \end{bmatrix}$$

durch die Oberfläche der Kugel

$$K : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Nach dem Gaußschen Divergenzsatz gilt

$$\int_{\partial K} \langle H, N \rangle \, d\sigma = \int_K \operatorname{div} H \, d(x, y, z) = \int_K 1 \, d(x, y, z) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(siehe Beispiel 8.2).

(ii) Zu berechnen ist der Fluss $\int_{\partial K} \langle H, N \rangle \, d\sigma$ des Vektorfeldes

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ y \end{bmatrix}$$

durch die Oberfläche des Zylinderausschnitts

$$K : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1.$$

Nach dem Gaußschen Divergenzsatz gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \langle H, N \rangle \, d\sigma &= \int_K \operatorname{div} H \, d(x, y, z) \\ &= \int_K (y^2 + x^2) \, d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 r^2 \, r \, dr \, d\varphi \, dz = \pi. \end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Gleichheit Zylinderkoordinaten eingesetzt haben (siehe Beispiel 8.3).

Zur geometrischen Interpretation des Gaußschen Integralsatzes

Das Oberflächenintegral $\int_{\partial K} \langle H, N \rangle \, d\sigma$ beschreibt den mittleren Fluss des Vektorfeldes H durch die Oberfläche ∂K von K (von innen nach außen).

Beschreibt H das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung, so gilt

$$\begin{aligned} \langle H(X), N(X) \rangle d\sigma(X) &= \langle H(X), \frac{F_x(X) \times F_y(X)}{\|F_x(X) \times F_y(X)\|} \rangle \|F_x(X) \times F_y(X)\| d(x, y) \\ &= \underbrace{\langle H(X), F_x(X) \times F_y(X) \rangle}_{\text{Spatprodukt von } H(X), F_x(X), F_y(X)} d\sigma(X). \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Das Spatprodukt von $H(X), F_x(X), F_y(X)$ ist gerade das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds. Also beschreibt $\langle H(X), N(X) \rangle d\sigma(X)$ das Volumen derjenigen Flüssigkeit, die durch das Oberflächenelement $d\sigma$ strömt und damit

$$\int_{\partial K} \langle H, N \rangle d\sigma$$

das Gesamtvolumen der durch die Oberfläche strömenden Flüssigkeitsmenge.

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist diese Menge gleich dem Integral

$$\int_K \operatorname{div} H d(x, y, z)$$

über die Divergenz von H . Für jede ganz in K liegende Kugel $K_r(X)$ mit Mittelpunkt X und Radius r gilt insbesondere

$$\int_{K_r(X)} \operatorname{div} H d(x, y, z) = \int_{\partial K_r(X)} \langle H, N \rangle d\sigma$$

und für kleine Radien wird gelten

$$\int_{K_r(X)} \operatorname{div} H d(x, y, z) \sim \operatorname{div} H(X) \cdot |K_r(X)|,$$

also

$$\operatorname{div} H(X) \sim \frac{1}{|K_r(X)|} \int_{\partial K_r(X)} \langle H, N \rangle d\sigma.$$

Damit wird deutlich: die Divergenz von H misst den aus einer Volumeneinheit austretenden Fluss. Deshalb heißt $\operatorname{div} H(X)$ auch die **Quelldichte**. Punkte X mit

- $\operatorname{div} H(X) > 0$ heißen **Quellen**
- $\operatorname{div} H(X) < 0$ heißen **Senken**.

H heißt **quellenfrei**, wenn $\operatorname{div} H(X) = 0$ für alle X .

Illustrationen

In einer Kugel K_R betrachten wir die Geschwindigkeitsfelder zweier Flüssigkeiten:

(a) **gleichförmiger Durchfluss**

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ also } \operatorname{div} H = 0$$

und daher $\int_{K_R} \operatorname{div} H d(x, y, z) = 0$. Für das Oberflächenintegral gilt andererseits:

$$\int_{\partial K_R} \langle H, N \rangle d\sigma = \int_G \langle v, F_x \times F_y(x, y) \rangle d(x, y) + \int_G \langle v, \hat{F}_x \times \hat{F}_y(x, y) \rangle d(x, y) = 0$$

(siehe Beispiel 9.1). Hierbei bezeichnet $\hat{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}$ die Oberfläche der unteren Halbkugel.

(b) Geschwindigkeitsfeld mit Quelle

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \operatorname{div} H(x, y, z) = 3, \quad \text{also}$$

$$\int_{K_R} \operatorname{div} H d(x, y, z) = 3|K_R| = 3 \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3.$$

Andererseits

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_R} \langle H, N \rangle d\sigma &= 2 \int_G \underbrace{\langle F, F_x \times F_y \rangle}_{= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x, y) d(x, y) \\ &= 2 \int_G \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d(x, y) = 2R \cdot 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Satz (Stokesscher Integralsatz) Es sei $F : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche über \bar{D} , $\bar{D} \subset G$, G offen. F sei zweimal stetig differenzierbar, \bar{D} sei ein Normalbereich und $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine positiv orientierte stetig differenzierbare Parametrisierung des Randes $\partial \bar{D}$. Dann ist $Y(t) = F(X(t))$, $t \in [a, b]$, eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes $\partial \mathcal{F}$ von $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$. Es sei $H : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\mathcal{F} \subset U$. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} H, N \rangle d\sigma = \int_{\partial \mathcal{F}} H dY.$$

Beispiel 9.5 Es sei $R > 0$ und

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}, \quad [x, y]^T \in D := \{X \in \mathbb{R}^2 : \|X\| < R\}$$

die Fläche, die die Oberfläche der oberen Halbkugel mit Radius R beschreibt, also $N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Desweiteren sei $H(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$, also $\operatorname{rot} H(x, y, z) = [0, 0, 2]^T$, und damit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} H, N \rangle d\sigma &= \int_{\mathcal{F}} 2N_3 d\sigma = \int_D 2 \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d(x, y) \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r dr d\varphi = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Andererseits können wir $\partial\bar{D}$ durch die Kurve

$$X(t) = R \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren, also folgt für die Kurve

$$Y(t) = F(X(t)) = \begin{bmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

dass

$$\int_{\partial\mathcal{F}} H dY = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{bmatrix} dt = 2\pi R^2.$$

Hierdurch wird der Stokessche Integralsatz bestätigt.

Zur geometrischen Interpretation des Stokesschen Integralsatzes

Das Wegintegral $\int_{\partial\mathcal{F}} H dY$ beschreibt die Zirkulation des Vektorfeldes entlang des Randes von \mathcal{F} . Analog zum Gaußschen Integralsatz ergibt sich für jedes kreisförmige Teilstück $S_r(X)$ der Fläche um einen Flächenpunkt X :

$$\int_{S_r(X)} \langle \text{rot } H, N \rangle d\sigma = \int_{\partial S_r(X)} H dY$$

und für kleine Radien r wird gelten

$$\int_{S_r(X)} \langle \text{rot } H, N \rangle d\sigma \sim \langle \text{rot } H(X), N(X) \rangle |S_r(X)|$$

also

$$\langle \text{rot } H(X), N(X) \rangle \sim \frac{1}{|S_r(X)|} \int_{\partial S_r(X)} H dY.$$

Hiermit wird deutlich: $\langle \text{rot } H, N \rangle$ misst die Zirkulation pro Flächeneinheit und heißt entsprechend **Wirbelstärke von H um N** .