Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. M. Geißert
C. Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
01.07.2008

13. Übungsblatt zur Mathematik II für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Der gesamte Inhalt dieses Übungsblattes ist klausurrelevant!

Gruppenübung

Aufgabe G1

Berechnen Sie für

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$$

den Wert des Integrals

$$I = \int_B \exp\left(x^2 + y^2 + z^2\right) z \;\; \mathrm{d}(x, y, z)$$

mittels geeigneter Koordinatentransformation.

Aufgabe G2

Skizzieren Sie die Menge

$$M \ := \ \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq 2, \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \text{ und } 0 \leq y \leq x\sqrt{3}\right\}$$

und berechnen Sie ihr Volumen unter Benutzung von Zylinderkoordinaten.

Aufgabe G3

Es sei

$$M := \left\{(x, 0, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = r\cos\varphi, x = r\sin\varphi, r \in [0, 1], \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]\right\}$$

und B der Körper, der durch Rotation von M um die z-Achse entsteht. Skizzieren Sie die Menge B und berechnen Sie ihr Volumen mittels einer geeigneten Transformation und als Rotationskörper.

Aufgabe G4 (Test)

Kennzeichnen Sie die folgenden Aussagen jeweils durch „w“ (wahr) bzw. durch „f“ (falsch).

(a) Gegeben sei ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $D(F) = \mathbb{R}^3$. Dann gilt für die Funktionen $g_1 = \text{div } F$, $g_2 = \text{rot } F$ und $g_3 = \text{div}(\text{rot } F)$

( ) g_1 ist eine skalare Funktion

( ) g_2 ist ein Vektorfeld

( ) g_3 ist eine skalare Funktion.

(b) Der Stokessche Integralsatz stellt einen Zusammenhang her zwischen

( ) einem Oberflächenintegral und einem Wegintegral

( ) einem Volumenintegral und einem Oberflächenintegral

( ) einem Volumenintegral und einem Wegintegral.

Aufgabe G5

Seien F, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfelder und $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie die folgenden Zusammenhänge:

$$\text{div}(F \times G) = \langle G, \text{rot}F \rangle - \langle F, \text{rot}G \rangle, \qquad \text{rot}(\phi F) = \phi \cdot \text{rot}F + (\nabla \phi) \times F.$$

Aufgabe G6

Gegeben sei der Körper Z mit

$$Z = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 5 \right\}.$$

Sei S die Oberfläche von Z und N die äußere Normale von S. Ferner sei das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $D(V) = \mathbb{R}^3$ und

$$V(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)^T$$

gegeben. Skizzieren Sie den Körper Z. Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_S \langle V, N \rangle \, d\sigma$

(a) direkt

(b) mit Hilfe das Gaußschen Integralsatzes.

Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

Aufgabe G7

Sei $H(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ ein Vektorfeld. Sei $\mathcal{S}$ die Schnittfläche des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 1$. Der Weg $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ beschreibe den Rand $\partial\mathcal{S}$ der Fläche $\mathcal{S}$. Bestimmen Sie

$$\int_{\partial S} H \cdot dY$$

mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.