Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. M. Geißert
C. Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008
23.06.2008

12. Übungsblatt zur Mathematik II für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Test)

Kennzeichnen Sie die folgenden Aussagen jeweils durch „w“ (wahr) bzw. durch „f“ (falsch).

(a) Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene stellt einen Zusammenhang her zwischen

( ) einem Doppelintegral und einem Wegintegral
( ) einem Wegintegral und einem Wegintegral
( ) einem Doppelintegral und einem Doppelintegral.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

( ) Kugelkoordinaten eignen sich besonders gut, um Integrale über Würfel zu berechnen
( ) Kugelkoordinaten eignen sich besonders gut, um Integrale über Kugelschalen zu berechnen
( ) Polarkoordinaten eignen sich besonders gut, um Integrale über Kugelschalen zu berechnen
( ) Polarkoordinaten eignen sich besonders gut, um Integrale über Kreisflächen zu berechnen.

Hinweis: In der Klausur erhalten Sie zwei Punkte für eine richtige Antwort und einen Minuspunkt für eine falsche Antwort. Eine nicht bearbeitete Aussage wird mit Null Punkten bewertet. Die niedrigst mögliche Gesamtpunktzahl für die Aufgabe ist Null.

Aufgabe G2

Untersuchen Sie, für welche $\alpha > 0$ das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{B_1(0)} r^{-\alpha} d(x,y,z) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} r^{-\alpha} d(x,y,z)$$

(mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) existiert. Berechnen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals.

Hinweis: Wählen Sie zunächst eine geeignete Koordinatentransformation.

Aufgabe G3

Sei $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Begründen Sie zunächst, wieso E ein Normalbereich ist. Benutzen Sie die Transformation (verallgemeinerte Polarkoordinaten)

$$g : [0, \infty[\times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, \quad g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi) \\ br\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus der Vorlesung.

Aufgabe G4

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche A, die von den Kurven

$$X_1(t) = (t, \frac{4}{3\pi} t)^T, t \in [0, 3\pi], \quad X_2(t) = (t, 4 + \sin(t))^T, t \in [0, 3\pi],$$
$$X_3(t) = (0, t), \quad t \in [0, 4]$$

eingeschlossen wird. Verwenden Sie hierzu den Satz von Gauß in der Ebene. Fertigen Sie auch eine Skizze an. Ist A x- bzw. y-projizierbar?

Hausübung

Aufgabe H1

Sei

$$B = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}\sqrt{x} \leq y \leq \cos(\frac{\pi}{8} x) \right\}.$$

Skizzieren Sie B und berechen Sie den Flächeninhalt von B einmal direkt und einmal mit Hilfe des Gaußschen Satzes in der Ebene. Vergleichen Sie beide Ergebnisse.

Aufgabe H2

Berechnen Sie für
$$B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$$
den Wert des Integrals
$$I_R = \int_{B_R} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \; \mathrm{d}(x,y)$$
in Abhängigkeit von $R \in (0,\infty)$ mittels geeigneter Koordinatentransformation.

Bestimme weiterhin den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} I_R$. Was hat man damit berechnet?

Aufgabe H3

Bestimmen Sie das Volumen des Ellipsoids
$$E = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \le 1\right\}.$$

Gehen Sie dabei analog zur Aufgabe **G3** vor.