Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. M. Geißert
C. Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
16.06.2008

11. Übungsblatt zur Mathematik II für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Test)

(a) Der Wert des Integrals $\int\limits_G (2x + y^3)\,\mathrm{d}(x, y)$ mit

$$G = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\}$$

beträgt

( ) 15, ( ) 30, ( ) 45.

(b) Es seien $G = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 1 - (x - 1)^2 \le y \le 2x\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R}^2$ eine auf G stetige Funktion. Dann gilt

( ) G ist x-projizierbar
( ) G ist y-projizierbar
( ) $\int_G f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_0^2 (\int_{1-(x-1)^2}^{2x} f(x, y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$
( ) $\int_G f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_0^4 (\int_{y/2}^{1+\sqrt{1-y}} f(x, y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$.

Aufgabe G2

Es sei $G = \{(x, y)^T : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_G x^3 \sqrt{y}\,\mathrm{d}(x, y).$$

Spielt die Integrationsreihenfolge bei der Berechnung eine Rolle? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe G3

Es sei G das abgeschlossenen Flächenstück im 1. Quadranten, das durch die Gerade $y = 2x$ und die Parabel $y = x^2$ begrenzt wird.

(a) Skizzieren Sie G.

(b) Ist G sowohl x- als auch y-projizierbar?

(c) Berechnen Sie $\int_G \frac{1}{8}(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}(x, y)$.

Hausübung

Aufgabe H1

(a) Es sei $I = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\}$. Berechnen Sie $\int_I x^y\, \mathrm{d}(x, y)$.

(b) Es sei $J = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le \pi,\ 1 \le y \le 2,\ 1 \le z \le 2\}$. Berechnen Sie $\int_J \sin(x) \ln(\mathrm{e}yz)\, \mathrm{d}(x, y, z)$.

Aufgabe H2

Es sei durch

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : 2 \le x_1 \le 4,\ \ 0 \le x_2 \le \pi,\ \ -1 \le x_3 \le 1\}$$

und die Dichtefunktion $\rho : Q \to \mathbb{R}, \quad \rho(x_1, x_2, x_3) = -\sin(x_2 - \pi) x_1^{\frac{1}{2}} \exp(-x_3)$ ein inhomogener Quader gegeben. Berechnen Sie die Gesamtmasse

$$M := \int\limits_Q \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3)$$

sowie den Schwerpunkt $S = (S_1, S_2, S_3)$, gegeben durch

$$S_i := \frac{1}{M} \int\limits_Q x_i \rho(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, \ldots, 3,$$

des Quaders. Zeigen Sie zunächst, dass die Integrale existieren.

Aufgabe H3

(a) Sei B_1 die rechte Hälfte des Kreises mit Radius 3 um den Nullpunkt. Berechnen Sie $\int_{B_1} xy^3\, \mathrm{d}(x, y)$.

(b) Sei B_2 das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)^T$, $(\pi, 0)^T$ und $(0, 1)^T$. Berechnen Sie $\int_{B_2} (\cos(x) + y^2)\, \mathrm{d}(x, y)$.

Skizzieren Sie zunächst den jeweiligen Integrationsbereich und begründen Sie, wieso dieser ein Normalbereich ist.