Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. M. Geißert
C. Brandenburg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008
09.06.2008

10. Übungsblatt zur Mathematik II für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}.$$

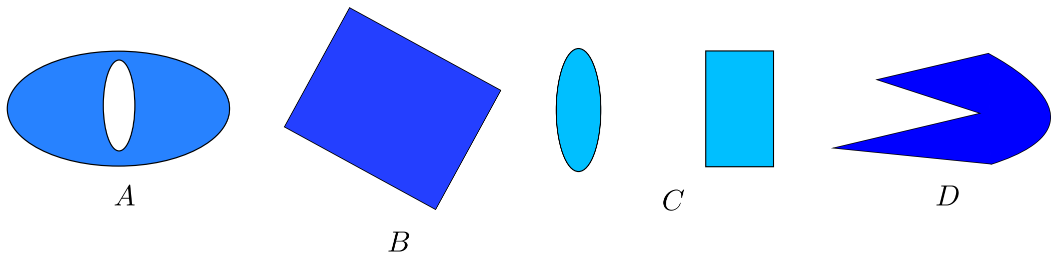
(a) Integrieren Sie F entlang des Weges X_1 von 0 nach $(1,1)^T$ mit $X_1(t) = (t,t)^T$, $t \in [0,1]$.

(b) Integrieren Sie F entlang des Weges X_2 von 0 nach $(1,1)^T$ mit $X_2(t) = (t^2,t^3)^T$, $t \in [0,1]$.

(c) Besitzt F ein Potential?

Aufgabe G2 (Diskussion)

Welche der Mengen A, B, C, D sind sternförmig? Geben Sie gegebenenfalls einen



Punkt S an, so dass für jedes X aus der Menge die Verbindungsstrecke zwischen S und X wieder in der Menge liegt. Ist dieser Punkt S eindeutig bestimmt?

Aufgabe G3

Wir betrachten die Vektorfelder $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1x_2 + 2 \\ 4x_1^2 \end{pmatrix} \qquad g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Besitzt f bzw. g ein Potential? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential.

Aufgabe G4

Wir betrachten die Vektorfelder $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1x_2 + 1 \\ 3x_1^2 - 2x_2 \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_2^3 \\ x_1^2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Besitzt f bzw. g ein Potential? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential mittels *Integration entlang geeigneter Wege.*

Hausübung

Aufgabe H1

(i) Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x, y) = (2x - 3y, -3x + 2y)^T.$$

(a) Betrachten Sie den durch $Y(t) = (\sin^2(t), \cos^2(t))^T$ für $t \in [0, \pi/4]$ gegebenen Weg W.
Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dY$.

(b) Zeigen Sie, dass $U = -x^2 + 3xy - y^2$ ein Potential von F ist.

(c) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dX$ längs eines Weges W, der die Punkte $P_1 = (0, 1)$ und $P_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ verbindet, unter Verwendung von (b).

Hinweis:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

(ii) Skizzieren Sie zwei Mengen, die sternförmig sind, und zwei Mengen, die nicht sternförmig sind. Begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe H2

Wir betrachten die Vektorfelder $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2^3 \\ 3x_1^2x_2^2 + 2x_2x_3^2 \\ 2x_3x_2^2 + 3x_3^2 \end{pmatrix} \qquad g(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1}\sin x_1 \cos x_2 - e^{x_1}\sin x_1 \cos x_2 \\ -e^{x_1}\cos x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}.$$

Besitzt f bzw. g ein Potential? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential.

Aufgabe H3

Wir betrachten die Vektorfelder $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1}x_2x_3^2 + x_2^2x_3 \\ \mathrm{e}^{x_1}x_3^2 + 2x_1x_2x_3 \\ 2\mathrm{e}^{x_1}x_2x_3 + x_1x_2^2 \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1}x_1x_2 + \mathrm{e}^{x_1}x_2 \\ \mathrm{e}^{x_1}x_1 + 2\mathrm{e}^{x_3}x_2 \\ 2\mathrm{e}^{x_3}x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Besitzt f bzw. g ein Potential? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential mittels *Integration entlang geeigneter Wege.*