Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. M. Geißert
C. Brandenburg
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
19.05.2008

7. Übungsblatt zur Mathematik II für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 4 - x^2y^2 + x^3 + y^2$. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

(b) Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x,y) = x^4 + y^2 - 2$. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

Aufgabe G2

Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, negativ definit, indefinit oder nichts davon? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3

Man betrachte zwei Vektorfelder F, G: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die mit Hilfe der untenstehenden Komponenten durch $F(x,y) = [f_1(x,y), f_2(x,y)]^T$ und $G(x,y) = [g_1(x,y), g_2(x,y)]^T$ definiert seien:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \exp(x) + y^2, \qquad & f_2(x,y) &= \sin(y), \\ g_1(x,y) &= x^2y, \qquad & g_2(x,y) &= \cos(y). \end{aligned}$$

Es ist die Funktionalmatrix der Komposition H: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$H(x,y) = F(G(x,y)) = [f_1(g_1(x,y), g_2(x,y)), f_2(g_1(x,y), g_2(x,y))]^T \tag{1}$$

zu bestimmen. Gehen Sie hierzu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen f_1, f_2, g_1, g_2.

(b) Setzen Sie aus den partiellen Ableitungen aus (a) die Funktionalmatrizen $J_F(x, y)$ und $J_G(x, y)$ zusammen.

(c) Stellen Sie $J_F(g_1(x, y), g_2(x, y))$ auf, und bestimmen Sie $J_H(x, y)$ nach der Kettenregel durch Matrizenmultiplikation. Geben Sie $J_H(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \pi)$ an.

Sie können das Ergebnis überprüfen, indem Sie H gemäss (1) explizit berechnen und daraus die Funktionalmatrix $J_H(x, y)$ bilden.

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten ein Vektorfeld H: $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_3 > 0\} \to \mathbb{R}^3$ mit den drei Komponentenfunktionen

$$\begin{aligned} H_1(x_1, x_2, x_3) &= \cos(x_1^2 + x_2^2 - x_3), \\ H_2(x_1, x_2, x_3) &= \exp(\sqrt{x_1 x_3}), \\ H_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1, \end{aligned}$$

also $H(x_1, x_2, x_3) = [H_1(x_1, x_2, x_3), H_2(x_1, x_2, x_3), H_3(x_1, x_2, x_3)]^T$.

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der Komponenten H_1, H_2, H_3.

(b) Geben Sie die Funktionalmatrix $J_H(x_1, x_2, x_3)$ an und berechnen Sie die Funktionaldeterminante.

(c) Berechnen Sie $J_H(1, 1, 1)$.

Aufgabe H2

Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, negativ definit, indefinit oder nichts davon? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -4 & \sqrt{14} & 0 \\ \sqrt{14} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3

(a) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.
Bestimmen Sie alle Extrema von h.

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x - 2)e^{-x+y}$.
Zeigen Sie, daß f keine Extrema besitzt.
Für welche Werte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Hesse-Matrix $H_f(x, y)$ positiv definit?

Abgabe: 26. - 28. Mai 2008 in der jeweiligen Übung.