Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. M. Geißert
C. Brandenburg
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
05.05.2008

5. Übungsblatt zur Mathematik II für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = -x^3 + 2x^2y - y^2.$$

Weiter sei $(g_1, g_2)^T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} g_1(\varphi) \\ g_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $h(\varphi) = f(g_1(\varphi), g_2(\varphi))$.

(a) Geben Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} an.

Stimmen f_{xy} und f_{yx} überein?
Hinweis: f_x ist eine andere Schreibweise für $\frac{\partial f}{\partial x}$.

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung h' von h mit der Kettenregel.

(c) Bestimmen Sie h' direkt.

Aufgabe G2

Die Kugelkoordinaten $(r, \varphi, \theta) \in]0, \infty[\times [0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ eines Punktes $P = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sind gegeben durch

$$x = g_1(r,\varphi,\theta) = r\cos\varphi\cos\theta,\ y = g_2(r,\varphi,\theta) = r\sin\varphi\cos\theta,\ z = g_3(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta.$$

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Die Verkettung $F(r,\varphi,\theta) = f(g_1(r,\varphi,\theta), g_2(r,\varphi,\theta), g_3(r,\varphi,\theta)$ beschreibt diese Funktion in Kugelkoordinaten.

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die partiellen Ableitungen von F.

Aufgabe G3

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter seien $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $a(x) < b(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(t) \mathrm{d}t.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $h(x, y) = \int_x^y g(t)\mathrm{d}t$ und verwenden Sie dann die Kettenregel für Funktionen von zwei Variablen.

Hausübung

Aufgabe H1

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der folgenden Funktionen:

(a) $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$

$$f_1(x, y) = xy^2, \quad f_2(x, y) = \cos(xy), \quad f_3(x, y) = \mathrm{e}^{1+x^2};$$

(b) $g_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$

$$g_1(x, y, z) = x \sin^2(y) \cos(z),\ g_2(x, y, z) = x \sin(x) \sin(z),\ g_3(x, y, z) = \mathrm{e}^x \cos(y).$$

Aufgabe H2

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$.

(a) Skizzieren Sie f.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von f. Geben Sie den Gradienten von f an. Ist f total differenzierbar?

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in $(1, 1)^T$ in Richtung $v_\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ mit Hilfe des Differenzenquotienten. Wie kann man die Richtungsableitung noch berechen?

(d) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs für die Punkte $(x, 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe H3

(a) Man berechne für die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y, z) = xyz \sin(x + y + z)$$

die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ gegeben.

i. Skizzieren Sie f.

ii. Zeigen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

iii. Bestimmen Sie den Gradienten von f und die Richtung des steilsten Anstiegs. Zeichnen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs an den Stellen $(1, 1)$, $(2, 0)$ und $(0, -1)$ in die Skizze ein.

Abgabe: 13. - 14. Mai 2008 in der jeweiligen Übung. Da die Übungen am 12. Mai ausfallen, geben Sie bitte Ihre Blätter in einer anderen Übung ab. Bitte schreiben Sie in diesem Fall den Namen der/des jeweiligen Übungsleiter(in) auf Ihre Blätter.