Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. M. Geißert
C. Brandenburg
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
28.04.2008

4. Übungsblatt zur Mathematik II für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Im mathematischen Institut in Neustadt an der Weierstraße wurde eingebrochen. Es fehlen nur ein paar konvergente Reihen, aber bei den Funktionen in zwei Variablen ist vieles durcheinander geraten. Helfen Sie, die Graphen und Höhenlinien (s. Beiblatt) der folgenden Funktionen wieder richtig zu ordnen?

$$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = x + y - 1, & f_2(x,y) = x^2 + 4y^2, & f_3(x,y) = x^2 - y^2 - 8, \\ f_4(x,y) = \sin(x), & f_5(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}, & f_6(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+10}, \\ f_7(x,y) = \ln(x^2+y^2), & f_8(x,y) = \tan(x^2+y^2), & f_9(x,y) = e^{x+y}, \\ f_{10}(x,y) = x^3 - y^2 + 4, & f_{11}(x,y) = \sin(x)\cdot\sin(y). & \end{array}$$

Beachten Sie, dass die Auflösungsmöglichkeiten des Rechners begrenzt sind, sodass einige Bilder ungenau sind.

Aufgabe G2

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Bestimmen Sie alle Punkte (x,y) in denen f stetig ist.

Aufgabe G3

Skizzieren Sie die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|,|y|) < 2\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2,\ y \leq 3\} \text{ und} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\} \end{aligned}$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung!) an, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind.

Hausübung

Aufgabe H1

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-y^3}{x^4-y^4} & : \quad x^4 - y^4 \neq 0 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Skizzieren Sie die Höhenlinien der Funktion. Ist die Funktion stetig im Punkt $(0,0)$? Welchen Hinweis geben die Höhenlinien?

Hinweis: Die Höhenlinien sind Kreise. Stellen Sie daher die Gleichung $f(x,y) = c$ zunächst in der Form $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ dar. Die Zahlen x_0, y_0, r hängen natürlich von c ab.

Aufgabe H2

Gegeben seien $r > 0$, $\alpha > 0$ und die Kurve $X_{r,\alpha} : [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$X_{r,\alpha}(t) = (r\cos t, r\cos\alpha\sin t, r\sin\alpha\sin t)^T.$$

Skizzieren Sie die Kurven $X_{1,0}$ und $X_{2,\pi/2}$ und berechnen Sie die Schmiegeebene an den Stellen $t = \frac{\pi}{2},\ 2\pi$. Skizzieren Sie auch den Tangenteneinheitsvektor und den Hauptnormaleneinheitsvektor an diesen Stellen.

Aufgabe H3

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^4-y^3}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Bestimmen Sie alle Punkte (x,y) in denen f stetig ist.

Abgabe: 05. - 07. Mai 2008 in der jeweiligen Übung