Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. M. Geißert
C. Brandenburg
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
14.04.2008

# 2. Übungsblatt zur Mathematik II für MB, WI/MB, MPE, AngMech

## Gruppenübung

**Aufgabe G1**

Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

(a) Ermitteln Sie den Konvergenzradius $\rho$ und geben Sie für $x \in (-\rho, \rho)$ die Summe $f(x)$ der Potenzreihe an.

(b) Bestimmen Sie eine Potenzreihe für das Integral

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt,$$

wobei $|x| < 1$.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihe für die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$, wobei $|x| < 1$.

**Aufgabe G2**

Betrachten Sie die $2\pi$-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\cos(x/2)|$. Berechnen Sie die Fourierreihe von $f$ und bestimmen Sie damit den Reihenwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe? Geben Sie ggf. die Grenzfunktion an.

**Aufgabe G3**

Betrachten Sie die $2\pi$-periodische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{\pi}{2} \le x < 2\pi \end{cases}.$$

(a) Skizzieren Sie $g$ und geben Sie die Fourier-Reihe von $g$ an.

(b) Ermitteln Sie durch Betrachtung der Stelle $x = 0$ den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

# Hausübung

**Aufgabe H1**

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(x, x_0)$ für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(\cos x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ sowie das zugehörige Lagrange-Restglied $R_4(x, x_0)$. Welchen Fehler begeht man höchstens, wenn die Funktion $f$ im Intervall $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ durch das ermittelte Taylorpolynom dritten Grades ersetzt wird?

**Aufgabe H2**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die $2\pi$-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{für } |x| \le \pi/2, \\ 1, & \text{für } \pi/2 < |x| \le \pi. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f$ auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ und bestimmen Sie die Fourierreihe von $f$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe von $f$ und was ist die Grenzfunktion?

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Fourierreihe von $f$ den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)(4k+1)}.$$

*Hinweis*: Es gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

**Aufgabe H3**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $2\pi$-periodische Fortsetzung der durch $f_1 : [-\pi, \pi)$ und $f_1(x) = |x| - \frac{1}{\pi}x^2$ gegebenen Funktion.

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f$ auf dem Intervall $I = [-3\pi, 3\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von $f$.

(c) Untersuchen Sie, ob die Fourier-Reihe von $f$ konvergiert und bestimmen Sie ggf. die Grenzfunktion.

(d) Bestimmen Sie den Wert der Summe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

**Abgabe:** 21. - 23. April 2008 in der jeweiligen Übung