Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
Dr. M. Geißert
C. Brandenburg
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
07.04.2008

1. Übungsblatt zur Mathematik II für MB, WI/MB, MPE, AngMech

Gruppenübung

Aufgabe G1

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x)^n$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ sind die Reihen konvergent?

Aufgabe G2

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n = \sqrt[n]{n^2 x^3}, \quad x \in [0,5]$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0,1]$

(c) $g_n = \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe G3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. (Der Graph dieser Funktion ist die bekannte Gaußsche Glockenkurve.)

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(x,0)$.

(b) Geben Sie eine Potenzreihendarstellung der Funktion für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ an.

(c) Bestimmen Sie $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Hinweis: Dieses Integral besitzt keinen geschlossenen Ausdruck als Lösung.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms aus (a) näherungsweise $F(1)$.

Hausübung

Aufgabe H1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh(x)$.

a) Bestimmen Sie die Taylorkoeffizienten von f für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

b) Wie lauten die Taylorpolynome $T_3(x, 0)$ und $T_4(x, 0)$? Geben Sie das Restglied $R_4(x, 0)$ in Integralform an.

c) Zeigen Sie die folgende Abschätzung für $|x| < 1$:

$$|\sinh(x) - T_4(x, 0)| \leq \frac{1}{60}.$$

Hinweis: Aufgabenteil b) ist hilfreich.

d) Zeigen Sie, dass f durch eine Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ darstellbar ist, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie diese Reihe an.

Aufgabe H2

Sei $a \geq 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen in Abhängigkeit von a.

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (an^2 + 1)x^n.$$

Aufgabe H3

Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n = \frac{2x}{n} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}, \quad x \in [0, 1].$$

(a) Untersuchen Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse. Wie unterscheidet sich das Ergebnis von Beispiel 1.1 (ii) der Vorlesung? Gibt es dafür eine theoretische Erklärung?

Abgabe: 14. - 16. April 2008 in der jeweiligen Übung