Antrittsvorlesung

von Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Gauß-Abschätzungen für parabolische Gleichungen

oder:
Wie ein 10 DM-Schein bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen helfen kann.

Einleitung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einleitung

Einleitung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\boxed{G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}}$$

Übersicht

Einleitung

Die Wärmeleitungsgleichung

Halbgruppen und Gauß-Abschätzungen

Konsequenzen von Gauß-Abschätzungen

Wieso ist der Gauß-Kern nützlich?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= u_0(x) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

u_0 ist Anfangstemperaturverteilung, $\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(t,x)$.

Wieso ist der Gauß-Kern nützlich?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= u_0(x) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

u_0 ist Anfangstemperaturverteilung, $\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(t,x)$.
Nutze Fouriertransformation

- $\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist unitärer Isomorphismus
- $\mathcal{F}\partial_k f(\xi) = \mathrm{i}\xi_k \mathcal{F}f(\xi)$
- $\mathcal{F}^{-1}(f\cdot g) = (\mathcal{F}^{-1}f) * (\mathcal{F}^{-1}g)$, wobei $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$

Wieso ist der Gauß-Kern nützlich?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\mathcal{F}(u_t - \Delta u) = 0 \qquad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$$
$$\mathcal{F}u(0,\xi) = \mathcal{F}u_0(x) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n$$

u_0 ist Anfangstemperaturverteilung, $\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(t,x)$.

Nutze Fouriertransformation

- $\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist unitärer Isomorphismus
- $\mathcal{F}\partial_k f(\xi) = \mathrm{i}\xi_k \mathcal{F}f(\xi)$
- $\mathcal{F}^{-1}(f\cdot g) = (\mathcal{F}^{-1}f) * (\mathcal{F}^{-1}g)$, wobei $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$

Wieso ist der Gauß-Kern nützlich?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) &= \hat{u}_0(\xi) && \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

u_0 ist Anfangstemperaturverteilung, $\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(t,x)$.
Nutze Fouriertransformation

- $\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist unitärer Isomorphismus
- $\mathcal{F}\partial_k f(\xi) = \mathrm{i}\xi_k \mathcal{F}f(\xi)$
- $\mathcal{F}^{-1}(f \cdot g) = (\mathcal{F}^{-1}f) * (\mathcal{F}^{-1}g)$, wobei $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$

Wieso ist der Gauß-Kern nützlich?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) &= \hat{u}_0(\xi) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

u_0 ist Anfangstemperaturverteilung, $\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(t,x)$.
Lösung dieser gew. DGl für $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi)$$

Wieso ist der Gauß-Kern nützlich?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) &= \hat{u}_0(\xi) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

u_0 ist Anfangstemperaturverteilung, $\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(t,x)$.
Anwenden von $\mathcal{F}^{-1}$ liefert

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0)(x)$$

Wieso ist der Gauß-Kern nützlich?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) &= \hat{u}_0(\xi) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

u_0 ist Anfangstemperaturverteilung, $\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(t,x)$.
Anwenden von $\mathcal{F}^{-1}$ liefert

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0)(x) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|^2 t}) * u_0)(x) \end{aligned}$$

Wieso ist der Gauß-Kern nützlich?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) &= \hat{u}_0(\xi) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

u_0 ist Anfangstemperaturverteilung, $\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(t,x)$.
Anwenden von $\mathcal{F}^{-1}$ liefert

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0)(x) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|^2 t}) * u_0)(x) \\ &= \left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-|x|^2/4t} * u_0 \right)(x) \end{aligned}$$

Wieso ist der Gauß-Kern nützlich?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) &= \hat{u}_0(\xi) \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

u_0 ist Anfangstemperaturverteilung, $\Delta u(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(t,x)$.
Anwenden von $\mathcal{F}^{-1}$ liefert

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0)(x) \\ &= (\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|^2 t}) * u_0)(x) \\ &= \left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-|x|^2/4t} * u_0 \right)(x) \end{aligned}$$

$T_G(t)u_0 := G_t * u_0$ sogar stetig auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

Einleitung

Die Wärmeleitungsgleichung

Halbgruppen und Gauß-Abschätzungen

Konsequenzen von Gauß-Abschätzungen

Stark stetige Halbgruppen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

$(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, ist stark stetige Halbgruppe, falls

1. $T(0) = Id$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$
3. $\|T(t)f - f\|_X \to 0 \quad (t \to 0)$ für alle $f \in X$

Stark stetige Halbgruppen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

$(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, ist stark stetige Halbgruppe, falls

1. $T(0) = Id$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$
3. $\|T(t)f - f\|_X \to 0 \quad (t \to 0)$ für alle $f \in X$

- Begriff verallgemeinert Exponentialfunktion e^{At}

Stark stetige Halbgruppen

Definition

$(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, ist stark stetige Halbgruppe, falls

1. $T(0) = Id$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$
3. $\|T(t)f - f\|_X \to 0 \quad (t \to 0)$ für alle $f \in X$

- Begriff verallgemeinert Exponentialfunktion e^{At}
- Halbgruppe löst $u' - Au = 0$, $u(0) = u_0$ in X

Stark stetige Halbgruppen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

$(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, ist stark stetige Halbgruppe, falls

1. $T(0) = Id$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$
3. $\|T(t)f - f\|_X \to 0 \quad (t \to 0)$ für alle $f \in X$

- Begriff verallgemeinert Exponentialfunktion e^{At}
- Halbgruppe löst $u' - Au = 0$, $u(0) = u_0$ in X
- Gaußkern G_t definiert die Halbgruppe „$e^{\Delta t}$“ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, durch $e^{\Delta t} u_0 = G_t * u_0$

Gauß-Abschätzungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition

Eine stark stetige Halbgruppe T auf $X = L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, hat Gauß-Abschätzungen, falls für $f \in L^2(\Omega)$, $t > 0$

$$|T(t)f| \leq C e^{\omega t} T_G(bt)|f|$$

für Konstanten $C, b > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Satz

T hat Gauß-Abschätzungen $\iff$ Es gibt einen Kern $K_t \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ so dass

- $T(t)f(x) = \int_\Omega K_t(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y$ *für $f \in L^1(\Omega)$*
- $|K_t(x, y)| \leq C e^{\omega t} t^{-n/2} e^{-b|x-y|^2/t}$

Zwei einfache Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte $Af := f'' - f'$ in $X = L^2(\mathbb{R})$, $D(A) = H^2(\mathbb{R})$.
Dann gilt: $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\Delta}\mathrm{e}^{-t(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)} = T_G(t)S(t)$ mit $(S(t)f)(x) = f(x-t)$.
Kern ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} K_t(x,y) &= (4\pi t)^{-1/2} \exp(-(x-y-t)^2/4t) \\ &= (4\pi t)^{-1/2} \exp(-(x-y)^2/4t - t/4 + (x-y)/2). \end{aligned}$$

Zwei einfache Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachte $Af := f'' - f'$ in $X = L^2(\mathbb{R})$, $D(A) = H^2(\mathbb{R})$.
Dann gilt: $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\Delta}\mathrm{e}^{-t(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)} = T_G(t)S(t)$ mit $(S(t)f)(x) = f(x-t)$.
Kern ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} K_t(x,y) &= (4\pi t)^{-1/2}\exp(-(x-y-t)^2/4t) \\ &= (4\pi t)^{-1/2}\exp(-(x-y)^2/4t - t/4 + (x-y)/2). \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{4}\cdot 2\left((x-y)\left(\frac{1}{2t}\right)^{1/2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2t}\right)^{-1/2} \leq \frac{1}{4}\left((x-y)^2\frac{1}{2t} + 2t\right)$$

folgt

$$0 \leq K_t(x,y) \leq \mathrm{e}^{t/4}(4\pi t)^{-1/2}\exp(-(x-y)^2/8t).$$

Zwei einfache Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Der Neumann-Laplace ist gegeben durch die Sesquilinearform

$$a(u, v) = -\int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v} \, dx$$

mit $D(a) = H^1(\Omega)$, $(\Delta_N u, v)_{L^2} = a(u, v)$ für $u \in D(\Delta_N)$.

Zwei einfache Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Der Neumann-Laplace ist gegeben durch die Sesquilinearform

$$a(u,v) = -\int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x$$

mit $D(a) = H^1(\Omega)$, $(\Delta_N u, v)_{L^2} = a(u,v)$ für $u \in D(\Delta_N)$.
Nicht für jedes Ω hat $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ eine Gauß-Abschätzung:
Betrachte $\Omega = (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt

- Eigenwert 1 von $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ hat unendliche Vielfachheit, da $\mathrm{e}^{\Delta_N t} 1_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})} = 1_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}$

Zwei einfache Beispiele

Der Neumann-Laplace ist gegeben durch die Sesquilinearform

$$a(u,v) = -\int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v}\, \mathrm{d}x$$

mit $D(a) = H^1(\Omega)$, $(\Delta_N u, v)_{L^2} = a(u,v)$ für $u \in D(\Delta_N)$.
Nicht für jedes Ω hat $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ eine Gauß-Abschätzung:
Betrachte $\Omega = (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt

- Eigenwert 1 von $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ hat unendliche Vielfachheit, da $\mathrm{e}^{\Delta_N t} 1_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})} = 1_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}$
- $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ ist damit nicht kompakt

Zwei einfache Beispiele

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Der Neumann-Laplace ist gegeben durch die Sesquilinearform

$$a(u,v) = -\int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x$$

mit $D(a) = H^1(\Omega)$, $(\Delta_N u, v)_{L^2} = a(u,v)$ für $u \in D(\Delta_N)$.
Nicht für jedes Ω hat $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ eine Gauß-Abschätzung:
Betrachte $\Omega = (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt

- Eigenwert 1 von $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ hat unendliche Vielfachheit, da $\mathrm{e}^{\Delta_N t} 1_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})} = 1_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}$
- $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ ist damit nicht kompakt
- Hätte $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ Gauß-Abschätzung, so wäre wegen $K_t \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ der Operator $\mathrm{e}^{\Delta_N t}$ Hilbert-Schmidt, also kompakt

Wie kann man Gauß-Abschätzungen zeigen — Davies' Trick

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Es sei $W := \{\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\partial_i \psi\|_\infty \leq 1, \|\partial_i \partial_j \psi\|_\infty \leq 1$ für alle $i, j = 1, \dots, n\}$.

Dann definiert

$$d(x, y) := \sup\{|\psi(x) - \psi(y)| : \psi \in W\}$$

eine zu $|x - y|$ äquivalente Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

Ist T stark stetige Halbgruppe auf $L^2(\Omega)$, so definiere für $\rho \in \mathbb{R}$ und $\psi \in W$

$$T^\rho(t)f = \mathrm{e}^{-\rho\psi} T(t)(\mathrm{e}^{\rho\psi} f)$$

Davies' Trick

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theorem (Davies' Trick)

Es sind äquivalent

1. *Es gibt Konstanten $C > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ mit*

$$\|T^\rho(t)\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega),L^\infty(\Omega))} \leq C e^{\omega(1+\rho^2)t} t^{-n/2}$$

   für alle $t > 0$, $\psi \in W$ und $\rho \in \mathbb{R}$.

2. *T hat eine Gauß-Abschätzung.*

Davies' Trick

Theorem (Davies' Trick)

Es sind äquivalent

1. *Es gibt Konstanten $C > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ mit*

$$\|T^\rho(t)\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega),L^\infty(\Omega))} \leq C e^{\omega(1+\rho^2)t} t^{-n/2}$$

   für alle $t > 0$, $\psi \in W$ und $\rho \in \mathbb{R}$.

2. *T hat eine Gauß-Abschätzung.*

Zeige L^1-L^∞ Abschätzungen via

- Beurling-Deny-Kriterium
- Nash Ungleichung
- Logarithmische Sobolev Ungleichung

Anwendung: Operatoren in Divergenzform

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Es gelte a_{ij}, b_j, c_j, $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\mu > 0$ mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ x - f.s.$$

Für $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$, V abgeschlossen, definiere stetige, koerzive Sesquilinearform mit $D(a) = V$ durch

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} D_i u \overline{D_j v} + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_j D_j u \overline{v} + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega c_j u \overline{D_j v} + c_0 u \overline{v}$$

Es gibt einen abgeschlossenen Operator A_V, so dass $a(u,v) = (A_V u, v)_{L^2}$, für $u \in D(A_V)$, $v \in V$.

Anwendung: Operatoren in Divergenzform

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theorem (Elliptische Operatoren mit Dirichlet Randbedingung)

Es sei $V = H_0^1(\Omega)$, b_j, $c_j \in W^{1,\infty}(\Omega)$. *Dann hat* e^{-tA_V} *eine Gauß-Abschätzung, falls*

1. $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *oder*
2. b_j, c_j *reellwertig*

Resultat gilt auch für andere Randbedingungen (z.B. Neumann, Robin), falls $\partial\Omega$ Lipschitz, alle Koeffizienten reellwertig und b_j, $c_j \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Einleitung

Die Wärmeleitungsgleichung

Halbgruppen und Gauß-Abschätzungen

Konsequenzen von Gauß-Abschätzungen

Einige Konsequenzen

$T : [0, \infty) \to \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ stark stetige Halbgruppe mit Gauß-Abschätzungen.
Dann gilt

1. Es gibt stark stetige Halbgruppen $T_p : [0, \infty) \to L^p(\Omega)$, so dass $T(t)f = T_p(t)f$ für alle $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

Einige Konsequenzen

$T : [0, \infty) \to \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ stark stetige Halbgruppe mit Gauß-Abschätzungen. Dann gilt

1. Es gibt stark stetige Halbgruppen $T_p : [0, \infty) \to L^p(\Omega)$, so dass $T(t)f = T_p(t)f$ für alle $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$
2. Ω beschränkt $\Longrightarrow$ $T(t)$ kompakt, insbesondere T sofort normstetig

Einige Konsequenzen

$T : [0, \infty) \to \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ stark stetige Halbgruppe mit Gauß-Abschätzungen.
Dann gilt

1. Es gibt stark stetige Halbgruppen $T_p : [0, \infty) \to L^p(\Omega)$, so dass $T(t)f = T_p(t)f$ für alle $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$
2. Ω beschränkt $\Longrightarrow T(t)$ kompakt, insbesondere T sofort normstetig
3. T holomorph $\Longrightarrow T_p$ holomorph in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$

Einige Konsequenzen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$T : [0, \infty) \to \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ stark stetige Halbgruppe mit Gauß-Abschätzungen. Dann gilt

1. Es gibt stark stetige Halbgruppen $T_p : [0, \infty) \to L^p(\Omega)$, so dass $T(t)f = T_p(t)f$ für alle $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$
2. Ω beschränkt $\Longrightarrow T(t)$ kompakt, insbesondere T sofort normstetig
3. T holomorph $\Longrightarrow T_p$ holomorph in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$
4. Das Cauchy Problem $u' - A_p u = f$, $u(0) = 0$ hat maximale L^q-Regularität (Hieber/Prüß)

Einige Konsequenzen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$T : [0, \infty) \to \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ stark stetige Halbgruppe mit Gauß-Abschätzungen. Dann gilt

1. Es gibt stark stetige Halbgruppen $T_p : [0, \infty) \to L^p(\Omega)$, so dass $T(t)f = T_p(t)f$ für alle $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$
2. Ω beschränkt $\Longrightarrow T(t)$ kompakt, insbesondere T sofort normstetig
3. T holomorph $\Longrightarrow T_p$ holomorph in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$
4. Das Cauchy Problem $u' - A_p u = f$, $u(0) = 0$ hat maximale L^q-Regularität (Hieber/Prüß)
5. A_p erzeuge $T_p \Longrightarrow \sigma(A_p) = \sigma(A_q)$ für alle $1 < p, q < \infty$ (Arendt, Kunstmann)

Einige Konsequenzen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$T : [0, \infty) \to \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ stark stetige Halbgruppe mit Gauß-Abschätzungen.
Dann gilt

1. Es gibt stark stetige Halbgruppen $T_p : [0, \infty) \to L^p(\Omega)$, so dass $T(t)f = T_p(t)f$ für alle $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$
2. Ω beschränkt $\Longrightarrow T(t)$ kompakt, insbesondere T sofort normstetig
3. T holomorph $\Longrightarrow T_p$ holomorph in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$
4. Das Cauchy Problem $u' - A_p u = f$, $u(0) = 0$ hat maximale L^q-Regularität (Hieber/Prüß)
5. A_p erzeuge $T_p \Longrightarrow \sigma(A_p) = \sigma(A_q)$ für alle $1 < p, q < \infty$ (Arendt, Kunstmann)

Unabhängiges Spektrum, Beweisidee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz (Arendt)

Es sei $\lambda \in \rho(A_p)$. Gibt es $R \in \mathcal{L}(L^q(\Omega))$ mit $Rf = R(\lambda, A_p)f$ für $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, dann gilt $\lambda \in \rho(A_q)$ und $R = R(\lambda, A_q)$.

T habe Kern $k(t, x, y)$. Dann gilt für $\lambda \in \rho(A_p)$

$$R(\lambda, A_p) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{A_p t} \, \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{A_p} R(\lambda, A_p)$$

Unabhängiges Spektrum, Beweisidee

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz (Arendt)

Es sei $\lambda \in \rho(A_p)$. Gibt es $R \in \mathcal{L}(L^q(\Omega))$ mit $Rf = R(\lambda, A_p)f$ für $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, dann gilt $\lambda \in \rho(A_q)$ und $R = R(\lambda, A_q)$.

T habe Kern $k(t, x, y)$. Dann gilt für $\lambda \in \rho(A_p)$

$$R(\lambda, A_p) = \underbrace{\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{A_p t}\,\mathrm{d}t}_{\in\mathcal{L}(L^q)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{A_p} R(\lambda, A_p)}_{\in\mathcal{L}(L^q)?}$$

Unabhängiges Spektrum, Beweisidee

Betrachte Halbgruppen $T_{\varepsilon,p}$ mit Kern

$$\frac{w_\varepsilon(x)}{w_\varepsilon(y)} k(t,x,y)$$

w_ε so dass $w_\varepsilon(x)/w_\varepsilon(y) \leq \mathrm{e}^{\alpha(\varepsilon)|x-y|}$ mit $\alpha(\varepsilon) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$
Gauß-Abschätzung liefert:

- $T_{\varepsilon,p} R(\lambda, A_{p,\varepsilon})$ hat Kern k_ε mit $|k_\varepsilon| \leq C$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$
- $k_\varepsilon(x,y) = \mathrm{e}^{\varepsilon(x-y)} k_0(x,y)$

Also $|k_0(x,y)| \leq C\mathrm{e}^{-\varepsilon_1|x-y|}$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^{A_p} R(\lambda, A_p) \in \mathcal{L}(L^q) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \in \rho(A_q)$$

Vielen Dank!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Sein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuss gewährt.

C.F. Gauß