Partielle Differentialgleichungen I

Matthias Geißert, Robert Haller-Dintelmann, Horst Heck

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einführung in die Problematik

1. Physikalische Motivation

Betrachte einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung. Nun wollen wir untersuchen wie die Wärme geleitet wird.

Annahmen:

- Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0,1]$, $u(t,x) =$ Temperatur in x zum Zeitpunkt t.
- Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Wärmequelle
- Energie in Segment $[x_1, x_2]$: $E(x_2, x_1, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(t, x_1)$
- Wärmeleitungsregel von Fourier: Sei $Q(t,x) =$ die Wärme durch Punkt x zum Zeitpunkt t

$$\frac{Q(t_2,x) - Q(t_1,x)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x) \qquad K_0 \text{ Thermale Konduktivität}$$

- Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} &c\rho(x_2 - x_1)(u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)) \\ &= (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_1) - \frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_2)\Big). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_1)}{x_2 - x_1}$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{f(x)}{c\rho} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \tag{1}$$

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die thermische Diffusivität (eine Konstante) ist.

Stationäre Temperaturverteilung (Gleichgewicht, steady state):

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) \overset{u(t,x)=v(x)}{\Longrightarrow} 0 = f(x) + \Delta v(x) \Longrightarrow \Delta v(x) = -f(x).$$

2. Mathematische Problemstellung

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

Gegeben: Stetige Funktion f auf $\overline{\Omega}$.

Gesucht: Stetige Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, in Ω zweimal differenzierbar mit

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) & = & f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) & = & 0(x) & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Anwendung: Potential eines Ladungsfreies elektrisches Feldes.

u stationäre Temperaturverteilung

BEMERKUNG 2.1. *Δ ist ein linearer Operator $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$.*

Idee: Definiere den Laplace-Operator in geeigneten Räumen und untersuche Abbildungsvorschriften.
Sei z.B. $X := \{h : h \in C^2(\overline{\Omega}),\ h\big|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $Y := C(\overline{\Omega})$ und betrachte $\Delta_{XY} : X \to Y$.
Typische Fragestellungen:

(a) Ist Δ_{XY} injektiv (d.h. die Lösung der Gleichung 2 ist eindeutig, falls sie existiert)
(b) Ist Δ_{XY} surjektiv (d.h. es existiert eine Lösung der Gleichung 2 für alle $f \in Y$).
(c) Finde möglichst einen großen Raum Y so dass Δ_{XY} surjektiv ist (d.h. die Gleichung ist für viele f lösbar).
(d) Da X typischerweise nicht explizit gegeben ist, finde möglichst viele Eigenschaften von X (d.h. Eigenschaften der Lösung).

BEMERKUNG 2.2. *(a) Der Laplace-Operator besitzt keine guten Eigenschaften in $C(\overline{\Omega})$. Suche nach geeigneten Räumen führt auf* Sobolev-Räume *(reflexive Banachräume bzw. Hilberträumen).*

Idee (L_2-Theorie):

(a) Die Existenz einer *schwachen* Lösung lässt sich im Hilbertraumfall (L_2-Theorie) sehr einfach über Lax-Milgram zeigen.
(b) Regularitätstheorie liefert dann eine *starke* bzw. *klassische* Lösung.

BEMERKUNG 2.3. *Eine wichtige Rolle bei der Regularitätstheorie spielt die sogenannte Lokalisierung.*

Idee (L_p-Theorie):

(a) Betrachte zunächst
$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$
(b) Benutze die sog. *Fouriertransformation.* Die zentrale Eigenschaft dieser Abbildung ist, dass sie Differentialausdrücke in algebraische umwandelt. Im Fall $(\lambda - \Delta)$ erhält man
$$(\lambda + |\xi|^2)\mathcal{F}u = \mathcal{F}f.$$
Damit ist die formale Inverse von $(\lambda - \Delta)$ durch $u = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}f$ gegeben.

Typische Fragestellungen:

(a) Wie kann man dem formalen Ausdruck $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ als Operator: $Y \to X$ einen Sinn zu geben?
(b) Finde hinreichende Bedinungen, so dass $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ ein beschränkter Operator in L_p ist.

Bemerkung 2.4. *Auf diesem Weg werden wir auch erkennen, dass sich* $T = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ *auch als Integraloperator, d.h.* $Tf(x) = \int k(x,y)f(y)dy$, *darstellen lässt.*

Im letzten Abschnitt betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung (1).
Idee:

(a) Betrachte u als Funktion $t \to u(t,\cdot) \in X$, X ein Funktionenraum (Sobolevraum)
(b) Sei Δ der Laplaceoperator und betrachte

$$\begin{aligned} u'(t) - \Delta u(t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL im Banachraum!
(c) Ana III: Lösung ist $e^{\Delta t}u_0$.

Typische Fragestellungen

(a) Vernüftige Definition für e^{tA} für große Klassen von (Differential-)operatoren.
(b) Suche Bedingungen an A, so dass e^{tA} wohldefiniert ist

Bemerkung 2.5. *Für spezielle (in Physik und Ingenieurwissenschaften sehr relevante) Klassen von Differentialoperatoren, sog.* Divergenzoperatoren, *lässt sich zeigen, dass* e^{tA} *wieder ein Integraloperator ist (z.B. Laplace auf* beliebigen *offenen Mengen).*

KAPITEL 2

Sobolevräume

1. L_p Räume (Erinnerung)

In diesem Abschnitt sei (M, Σ, μ) stets ein Maßraum.

DEFINITION 1.1.

(a) *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Setze* $\|f\|_p := \Big(\int\limits_M |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$.

(b) *Sei* $f : M \to \mathbb{K}$ *messbar. Dann heißt* f wesentlich beschränkt, *falls ein* $\alpha > 0$ *existiert mit* $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. *Ferner heißt*

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : \ \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\} = 0)\}$$

das wesentliche Supremum von f.

(c) *Sei* $1 \leq p \leq \infty$. *Definiere*

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K}) := \big\{f : f : M \to \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\big\}.$$

BEMERKUNG 1.2.

(a) $\|\cdot\|_p$ *ist eine Halbnorm auf* $\mathcal{L}^p$.

(b) *Sei* $f \in \mathcal{L}^p$. *Dann ist* $\|f\|_p = 0$ *genau dann wenn*

$$f \in \mathcal{N} := \{f : \ f \text{ messbar und } f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

(c) $\mathcal{L}^p$ *ist ein Vektorraum.*

(d) $\mathcal{N}$ *ist ein Unterraum von* $\mathcal{M}$, *dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von* $\mathcal{L}^p$*), und*

$$f \sim g \quad \overset{Def.}{\iff} \quad f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation

DEFINITION 1.3. *Der Raum* L^∞ *ist definiert durch:*

$$L^\infty(M, \mu) := \mathcal{L}(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty, \qquad \forall [f] \in L^\infty.$$

SATZ 1.4.

(a) $|f| \leq \|f\|_\infty$ *μ-fast überall.*

(b) $\|\cdot\|_\infty$ *ist ein Norm.*

(c) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \implies$ *es existiert ein* $A \in \Sigma$ *mit* $\mu(A^c) = 0$ *und* $f_n \to f$ *gleichmässig auf* A.

(d) $(L^\infty(M, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

DEFINITION 1.5. *Sei* $1 \leq p < \infty$

$$L^p(M,\mu) := (M,\Sigma,\mu,\mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \qquad \forall [f] \in L^p.$$

SATZ 1.6 (Höldersche Ungleichung). *Es sei* $1 \leq p,q \leq \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *(interpretiere* $1/\infty = 0$*). Desweiteren seien* $f \in L^p(M,\mu)$ *und* $g \in L^q(M,\mu)$. *Dann ist* $f \cdot g \in L^1(M,\mu)$ *und*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

BEWEIS. Die Fälle $p = 1, \infty$ sind trivial. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $f, g \neq 0$. Dann gilt

$$ab \leq \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q} \qquad \text{(Youngsche Ungleichung)}.$$

(Der Beweis dieser Ungleichung ist elementar.) Natürlich ist fg messbar. Seien $G := g/\|g\|_q$ und $F := f/\|f\|_p$. Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt $x \in M$ ergibt nach Integration

$$\int\limits_M |F(x)G(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int\limits_M \frac{|F(x)|^p}{p}\,\mathrm{d}\mu(x) + \int\limits_M \frac{|G(x)|^q}{q}\,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt. □

SATZ 1.7 (Minkowskische Ungleichung). *Sei* $1 \leq p < \infty$ *und* $f, g \in L^p(M,\mu)$. *Dann gilt*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

SATZ 1.8 (Riesz–Fischer). *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Dann ist* $L^p(M,\mu)$ *vollständig.*

SATZ 1.9. *Nehmen wir an, dass* $f_n \in L^p(M,\mu)$ *gegen* $f \in L^p(M,\mu)$ *konvergiert, dann existiert eine Teilfolge* f_{n_k}, *so dass* $f_{n_k}(x)$ μ*-fast überall konvergiert.*

SATZ 1.10 (Dualität). *Sei* $1 \leq p < \infty$, *und* (M,Σ,μ) σ*-endlicher Maßraum. Sei* $1/p + 1/q = 1$ *(so genannte* konjugierte Exponente*). Dann definiert* $L^q(M,\mu) \to L^p(M,\mu)'$

$$J(g)f := \int\limits_M f \cdot g\,\mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^q(M,\mu),\ f \in L^p(M,\mu).,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

BEWEIS. J ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist J linear. J ist isometrisch, denn sei $g \in L^q(M,\mu)$ und setze

$$f := \frac{\overline{g}}{|g|}\Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^{q/p}.$$

Dann

$$\|f\|_p = \int\limits_M \left(\frac{|\overline{g}|}{|g|}\right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\,\mathrm{d}\mu = 1$$

und $\int_M fg\,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen.

1. Fall $\mu(M) < \infty$: Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Betrachte $\nu : \Sigma \to \mathbb{K}$, $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$ $(\chi_A \in L^p(M,\mu))$. ν ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist ν absolut stetig bezüglich μ, denn $A \in \Sigma$ und $\mu(A) = 0$ impliziert $\chi_A = 0$ μ-fast überall, d.h. $\chi_A = 0$ in $L^p(M,\mu)$, also $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$. Satz von Radony–Nikodým ergibt $g \in L^1(M,\mu)$ mit

$$\nu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu = \int_M \chi_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Also wegen Linearität

$$\varphi(f) = \int_M fg \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \text{ Treppenfunktionen } f. \tag{3}$$

Ferner $|\varphi(f)| \le C'\|f\|_\infty$. Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^\infty(M,\mu)$ also gilt (3) für $f \in L^\infty(M,\mu)$. Wir zeigen nun $g \in L^q(M,\mu)$. Sei erst $q < \infty$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

f ist messbar und $|g|^q = fg = |f|^p$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in M : |f(x)| \le n\}$. Dann ist $\chi_{A_n} f \in L^\infty(M,\mu)$ und

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu &= \int_M \chi_{A_n} fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \le \|\varphi\| \|\chi_{A_n} f\|_p = \\ &= \|\varphi\| \Big(\int_{A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} = \|\varphi\| \Big(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \\ &\Longrightarrow \quad \left(\int_{A_n} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \|\varphi\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz von Beppo Levi(monotone Konvergenz) gibt $g \in L^q(M,\mu)$.
Jetzt betrachten wir der Fall $q = \infty$. Dann $|g| \le \|\varphi\|$, denn sei $A := \{x \in M : |g(x)| > \|\varphi\|\}$. Setze $f := \chi_A |g|/g$, $f \in L^\infty(M,\mu)$. Nehmen wir $\mu(A) > 0$ an.

$$\mu(A)\|\varphi\| < \int_A |g| \,\mathrm{d}\mu = \int_M fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(f) \le \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme $\Longrightarrow \mu(A) < \|f\|_1$, Widerspruch mit $\mu(A) = \|f\|_1$. Also $g \in L^\infty(M,\mu)$.

Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(M,\mu)$ also $\varphi = Jg$.

2. Fall, $\mu(M) = \infty$: Es sei $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ mit $\mu(M_n) < \infty$, und M_n paarweise disjunkt. Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Setze $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$, für $f \in L^p(M_n,\mu_n)$, wobei $\mu_n(A) := \mu(M_n \cap A)$. Dann $\|\varphi_n\| \le \|\varphi\|$, insbesondere $\varphi_n \in L^p(M_n,\mu_n)'$. Verwende jetzt den ersten Fall um $g_n \in L^q(M_n,\mu_n)$ zu bekommen. Setze $g := \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ (in jedem Punkt nur ein Summand, g_n wird durch 0 fortgesetzt auf M_n^c). Es ist $g \in L^q(M,\mu)$ und $\varphi = Jg$ zu zeigen. Sei $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$ und f wie in (4)

$$\begin{aligned}\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^n \int_{M_j} fg \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \int_{M_j} \chi_{M_j} f g_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f) \\ &= \varphi(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f) \leq \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p \\ &= \|\varphi\| \cdot \Big(\sum_{j=1}^n \int_M |\chi_{M_j} f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \Big(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|$, und nach Beppo Levi Theorem $g \in L^q(M,\mu)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \varphi(\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} fg \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_M \chi_{A_n} fg \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int_M fg.\end{aligned}$$

□

Satz 1.11 (L^p Interpolation Ungleichung). *Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(M,\mu) \cap L^{p_1}(M,\mu)$, dann ist $f \in L^{p_\theta}(M,\mu)$ und es gilt*

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Beweis. Setze $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$ und $h := |f|^{\theta p_\theta}$. Dann ist $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$, ferner $g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(M,\mu)$ und $h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(M,\mu)$ und

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \leq \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. □

Satz 1.12 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung). *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p_i \leq \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \ldots, m$. Sei ferner $1 \leq p \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \textit{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_p \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Beweis. ÜA. □

Definition und Satz 1.13. *(a) $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) := L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu)$ versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$ ist ein Banachraum.*

(b) Definiere

$$L^1 + L^\infty(M,\mu) := \{f : M \to \mathbb{K} \text{ mb.} : \exists g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu) \text{ mit } f = g + h\}.$$

Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty :\ f = g + h : g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu)\}.$$

ist eine Norm, mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

Satz 1.14. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt $L_p(M,\mu) \subseteq L_1 + L_\infty(M,\mu)$.*

Beweis. Der Fall $p = \infty$ ist trivial. Sei $f \in L^p(M,\mu)$. Setze $A := \{x \in M : |f(x)| \ge 1\}$ und $h := \chi_A f$, $g := \chi_{M\setminus A} f$. Dann $g \in L^\infty(M,\mu)$ und $h \in L^1(M,\mu)$, denn

$$\int_M |h|\,\mathrm{d}\mu = \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu \le \int_A |f|^p\,\mathrm{d}\mu \le \int_M |f|^p\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Theorem 1.15 (Riesz–Thorin Konvexitätstheorem). *Sei $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$ linear, ferner seien $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1,\infty]$ mit $p_0 < p_1$ und $r_0 < r_1$. Sei $\alpha \in (0,1)$ und setze*

$$\tfrac{1}{p_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{p_0} + \tfrac{\alpha}{p_1} \qquad \text{und} \quad \tfrac{1}{r_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{r_0} + \tfrac{\alpha}{r_1}.$$

Dann gilt

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_\alpha},L^{r_\alpha})} \le \|T\|^{1-\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_0},L^{r_0})} \|T\|^{\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_1},L^{r_1})}.$$

Zur Beweis benötigen wir folgenden Satz und folgendes Lemma.

Satz 1.16 (Hadamard, 3-Linien Satz). *Sei $a < b$ und $f : \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\} \to \mathbb{C}$ analytisch und beschränkt. Weiter sei*

$$M_a = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(a+it)|, \text{ und } M_b = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(b+it)|.$$

Dann gilt:

$$|f(x+iy)| \le M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}, \quad x+iy \in \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\}.$$

Beweis. Wir betrachten $f_\varepsilon(x+iy) = \mathrm{e}^{\varepsilon(x+iy)^2} f(x+iy) M_a^{\frac{x+iy-b}{b-a}} M_b^{\frac{a-(x+iy)}{b-a}}$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt $|f_\varepsilon(a+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon a^2}$ und $|f_\varepsilon(b+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}$ (Beachte: $|a^{iy}| = 1$ für $a > 0$, $y \in \mathbb{R}$). Außerdem gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} \sup_{a\le x\le b} |f_\varepsilon(x+iy)| = 0.$$

Mit dem Maximumprinzip für analytische Funktionen und ein hinreichend großes Rechteck folgt $|f_\varepsilon(z)| \le \max\{\mathrm{e}^{\varepsilon a^2}, \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}\}$. Aus $\varepsilon \to 0^+$ folgt die Behauptung. □

LEMMA 1.17. *Sei $p_0 < p < p_1$ und $f = \sum \alpha_j a_j \chi_{E_j}$ eine Treppenfunktion mit $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $|\alpha_j| = 1$, $a_j > 0$ und $\{E_j\}$ paarweise, disjunkte, mb. Mengen mit (jeweils) endlichem Maß. Weiter sei $\|f\|_p = 1$ und*

$$f_z = \sum \alpha_j a_j^{\frac{p}{p_z}} \chi_{E_j},$$

wobei p_z

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

genügt. Dann gilt:

$$\|f_z\|_{L^{p_{\mathrm{Re}\, z}}} = 1, \quad 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1.$$

BEWEIS. Es gilt

$$\int |f_z(x)|^{p_{\mathrm{Re}\, z}} d\mu \overset{\text{Ü.A.}}{=} \sum |a_j|^p \mu(E_j) = \|f\|_p^p = 1.$$

□

BEWEIS V. THEOREM 1.15. Sei $p = p_\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ und betrachte Treppenfunktion f und f' auf M, welche $\|f\|_p = \|f'\|_{p'} = 1$ erfüllen. Sei f_z und f'_z wie in Lemma 1.17, wobei f_z mit p_0 und p_1 und f'_z mit r_0 und r_1 konstruiert werden. Nach Voraussetzung ist

$$\Phi(z) := \int_M f'_z(x) T f_z(x) d\mu(x)$$

analytisch in z. Mit der Hölder-Ungleichung und Lemma 1.17 folgt nun:

$$|\Phi(j+iy)| \leq \|f'_z\|_{p'} M_j \|f_z\|_p \leq M_j, \quad j = 0, 1, \ y \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\Phi(j+iy)| \leq M_j, \quad j = 0, 1.$$

Damit folgt mit dem 3-Linien Satz, dass

$$\left| \int f' T f \right| \leq M_0^{1-\alpha} M_1^{\alpha}.$$

Da Treppenfunktionen dicht in $L^{p'}$ sind, erhalten wir $\|Tf\|_p \leq M_0^{1-\alpha} M_1^{\alpha}$. Die Behauptung folgt nun, da Treppenfunktionen auch in L^p dicht sind. □

2. L_p Räume II

Im Folgenden sei μ stets das Lebesgue-Maß und Σ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

SATZ 2.1 (Faltung, Youngsche Ungleichung). *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt*

(a) Für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

(b) Setzt man

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

so ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

Beweis. Sei $p = 1$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Für $p = \infty$ liefert die Hölder-Ungleichung

$$|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y| \leq \|f\|_1\|g\|_\infty,$$

insbesondere existiert $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.
Betrachte nun die Abbildung $T_f g := f * g$. Dann folgt aus dem Riesz–Thorin Konvexitätstheorem, dass $T_f \in \mathscr{L}(L^p, L^p)$ und $\|T_f\|_{\mathscr{L}(L^p,L^p)} \leq \|f\|_1$ für $1 \leq p \leq \infty$, d.h. (b) gilt. Ferner erhalten wir mit Beppo-Levi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||\chi_{B(0,r)}g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \|f\|_1\|\chi_{B(0,r)}g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p < \infty, \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}^d.$$

□

Beispiel 2.2.

(a) Betrachte die partielle Differentialgleichung

$$(1-\Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $f \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(x) = (k * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einem Kern $k \in L^1$.

(b) Betrachte

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $u_0 \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(t,x) = (k_t * u_0)(x), \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

mit $k_t \in L^1$ für $t > 0$.

Im Folgenden benötigen wir den Raum der *lokal* integrierbaren Funktionen $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Genauer,

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\text{mb.} : \|f\|_{L^1(K)} < \infty \text{ für alle kp. } K \subset \mathbb{R}^d \right\}.$$

Korollar 2.3. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann definiert die Abbildung $Tf := f * g$ einen stetigen linearen Operator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\|T\| \leq \|f\|_1$.*

Satz 2.4. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis. Wegen

$$|(f*g)(x)| = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$.
Sei $x_n \to x$. Wir zeigen $(f*g)(x_n) \to (f*g)(x)$. Setze

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y) \text{ und } F(y) = f(x-y)g(y),$$

dann gilt $F_n(y) \to F(y)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^d$. Anderseits, sei K kompakt so, dass $x_n - \operatorname{supp} f \subseteq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $x_n - y \notin \operatorname{supp} f$ falls $y \notin K$, d.h. $f(x_n - y) = 0$ für $y \notin K$. Daher ist $|F_n(y)| \leq \|f\|_\infty \chi_K(y)|g(y)|$ eine integrierbare Majorante. Nach dem Lebesgueschen Satz folgt $\int F_n\,\mathrm{d}y \to \int F\,\mathrm{d}y$. □

Definition 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und setze*

$$O_f := \Big\{ x \in \Omega : \exists V \subset \Omega \text{ offene Umgebung von } x \text{ mit } f(x) = 0 \text{ für f.a. } x \in V \Big\}$$

Dann heißt $\operatorname{supp} f := \Omega \setminus O_f$ *der* Träger *von f.*

Satz 2.6. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \tag{5}$$

Beweis. Wegen $|(f*g)(x)| \le \|f\|_1\|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$. Also

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{(x-\operatorname{supp} f)\cap \operatorname{supp} g} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Falls $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, gilt $(x-\operatorname{supp} f)\cap\operatorname{supp} g = \emptyset$ und $(f*g)(x) = 0$. $\square$

Bemerkung 2.7. *Im Satz 2.6 gilt* $\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

Bemerkung 2.8. *Die obige Aussage* (5) *gilt auch für* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$.

Satz 2.9. *Seien* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. *Dann ist* $f*g \in C^k(\mathbb{R}^d)$, *und* $D^\alpha(f*g) = D^\alpha f * g$. *Insbesondere* $f \in C_c^\infty$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Wie immer existiert $(f*g)(x)$ für alle x. Sei $e_j \in \mathbb{R}^d$ ein Standardbasisvektor, $h \in \mathbb{R}$, $|h| \le 1$. Setze $K := \operatorname{supp} f + \overline{B}(0,1)$, dies ist auch kompakt. Dann gilt (Differenzenquotient):

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{h}((f*g)(x+he_j) - (f*g)(x))\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y =\\
&= \int\limits_{K-x} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

wobei der Integrand gegen $D_j f(x-y)g(y)$ für alle y konvergiert. Außerdem gilt

$$\left|\tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\right| \le \|D_j f\|_\infty |g(y)|\chi_K(y).$$

Nach dem Satz von Lebesgue (Beachte: $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ bekommen wir $D_j(f*g)(x) = ((D_j f)*g)(x)$, und so die Behauptung. $\square$

Definition 2.10. *Eine Folge* $(\rho_n)_{n\ge1}$ *von Funktionen mit den Eigenschaften*

(a) $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$
(b) $\rho_n \ge 0$
(c) $\operatorname{supp}\rho_n \subseteq B(0,1/n)$
(d) $\int_{\mathbb{R}^d}\rho_n = 1$

heißt Mollifier.

Beispiel 2.11. *Betrachte* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq B(0,1)$, $\rho \ge 0$, $\int\rho = 1$, *und definiere* $\rho_n(x) := 1/n^d\rho(nx)$.

Lemma 2.12. *Sei* $f \in C(\mathbb{R}^d)$ *und* $(\rho_n)_{n\ge1}$ *ein Mollifier. Dann konvergiert* $\rho_n * f \to f$ *gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von* $\mathbb{R}^d$.

BEWEIS. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon$ für $x \in K$ und $|y| \leq \delta$. Also

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{B(0,1/n)} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

so für $n > 1/\delta$ gilt $|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$ für $x \in K$. □

LEMMA 2.13 (Urysohn, C^∞-Version). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq \Omega$, K kompakt. Dann existiert ein $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi(x) = 1$ für $x \in K$.*

BEWEIS. Sei $0 < 1/n < \varepsilon < \varepsilon + 1/n < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$. Setze $U_\varepsilon := \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, K) < \varepsilon\} \subseteq \Omega$ und $u = \chi_{U_\varepsilon}$. Dann gilt $\varphi := \rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B}(0, 1/n) + \overline{U}_\varepsilon \subseteq \Omega$, also $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega$ ist kompakt. Sei $x \in K$, dann $\varphi(x) = \int_{|y|\leq 1/n} u(x-y)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|y|\leq 1/n} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y = 1$. Ferner $\|\varphi\|_\infty \leq \|\rho_n\|_1 \cdot \|u\|_\infty = 1$. Da $\varphi \geq 0$ folgt auch $0 \leq \varphi \leq 1$. □

BEMERKUNG 2.14. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann existiert $V \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $\overline{V}$ kompakt und*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega.$$

BEWEIS. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ wie in Lemma 2.13 und setze

$$V := \{x \in \Omega; \varphi(x) > \frac{1}{2}\}.$$

□

SATZ 2.15. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

BEWEIS. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
Beh.:$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktion $T = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und $\|T - f\|_p \leq \varepsilon$, bekannt aus der Maßtheorie.
Beh.:$\forall \varepsilon > 0\ \exists u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u - \chi_{A_i}\|_p \leq \varepsilon$.
Wähle eine offene Menge O und eine kompakte Menge K mit $K \subset A_i \subset O$ und $|O \setminus K| \leq \varepsilon$ (Existenz: Maßtheorie). Dann existiert nach Lemma 2.13 ein $\varphi \in C_c^\infty(O)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf K. Es gilt:

$$\int\limits_O |\chi_{A_i} - \varphi|^p = \int\limits_{O\setminus K} |\chi_{A_i} - \varphi|^p \leq 2^p |O \setminus K| \leq 2^p \varepsilon.$$

□

SATZ 2.16. *Sei $(\rho_n)_{n\geq 1}$ ein Mollifier.*

(a) *Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_p \to 0$.*
(b) *Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_\infty \to 0$*

BEWEIS. (a) Nach Satz 2.15 existiert für $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Satz 2.6 liefert

$$\operatorname{supp}(\rho_n * g) \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + \operatorname{supp} g \subseteq K, \qquad \text{wobei } K \text{ kompakt.}$$

Da nach Lemma 2.12 $\rho_n * g$ gleichmässig auf K gegen g konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\rho_n * g - g\|_p^p = \int_K |\rho_n * g - g|^p \leq \varepsilon^p |K|.$$

Daraus folgt mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\rho_n * f - f\|_p &\leq \|\rho_n * (f - g)\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \varepsilon + \varepsilon |K|^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Wiederhole den Beweis von Lemma 2.12. □

KOROLLAR 2.17. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

BEWEIS. Setze $\Omega_n := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\}$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \Omega_n \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt nach dem Satz von Lebesgue $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$, d.h für $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.
Setze $g_m := \rho_m * f_n$, wobei ρ_m ein Mollifier ist. Dann existiert nach Satz 2.16 ein $m_0 > n_0$ mit $\|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$, $m \geq m_0$. Des Weiteren gilt

$$\operatorname{supp} g_m = \operatorname{supp} \rho_m + \operatorname{supp} f_{n_0} \subset \Omega, \quad m \geq m_0.$$

Damit erhalten wir

$$\|g_m - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\Omega)} + \|f_{n_0} - f\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon, \quad m \geq m_0.$$

□

SATZ 2.18 (Zerlegung der Eins). *Seien Ω, $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Seien ferner*

$$K_i \subset \Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset \Omega, \qquad i \in \mathbb{N},$$

mit K_i, $\overline{\Omega}_i$ kompakt und

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i = \Omega,$$

so, dass für alle $x \in \Omega$ eine Umgebung $U(x)$ existiert, welche nur endlich viele Ω_j trifft (diese Überdeckung heißt lokal endlich*). Nehmen wir ferner an, dass $K_j \cap K_i = \emptyset$, falls $i \neq j$.*
Dann existieren $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$, $i \in \mathbb{N}$ mit

(a) $\varphi_i \geq 0$
(b) $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in \Omega$
(c) $\operatorname{supp} \varphi_i \subset \Omega_i$

(d) $0 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i \leq 1$.

Außerdem gilt $\varphi_j(x) = 1$ *für* $x \in K_j$.

Beweis. 1. Schritt: Nehmen wir an dass wir die folgende Situation haben

$$K_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$$

wobei $\overline{V}_j$ kompakt, $U_i \cap K_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ und V_j, U_j sind lokal endliche Überdeckungen von Ω. Wähle φ'_j nach Lemma 2.13 zu U_j und $\overline{V}_j$. Dann gilt $\varphi(x) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi'_i(x) > 0$, wobei lokal in Ω nur endlich viele Summanden von 0 verschieden sind. Setze $\varphi_j(x) := \varphi'_j(x)/\varphi(x)$. Nach Konstruktion haben die φ_j die gewünschte Eigenschaften.

2. Schritt, Disjunktisierung von Ω_j und K_j: $U_j := \Omega_j \setminus \bigcup_{i\neq j} K_i$. Natürlich gilt $K_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$. Wir behaupten, dass U_j offen ist. Sei $x \in U_j$ und $U(x) \subseteq \Omega_j$ eine Umgebung von x so, dass $J := \{i : \Omega_i \cap U(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Für $j \neq k \in J$ existiert eine Umgebung $W_k(x) \subseteq U(x)$ von x mit $W_k(x) \cap K_k = \emptyset$. Setze $W(x) := \cap_{k\in J} W_k(x)$, die ist eine Umgebung von x mit $W(x) \subseteq U_j$ und $W(x) \cap K_i = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, also U_j ist offen. Sei jetzt $x \in \Omega$, liegt dann $x \in \Omega_j$ für ein j, dann liegt es entweder in U_j oder in K_i für ein $i \neq j$. Die Überdeckung U_j ist lokal endlich, da Ω_j lokal endlich ist.

3. Schritt, Konstruktion von V_j: Sei $V_1 := U_1$. Angenommen V_j, $j < n$ konstruiert ist mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j = \Omega,$$

sei F_n eine abgeschlossene Umgebung von ∂U_n die erfüllt

$$\partial U_n \subseteq F_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Solche eine Umgebung existiert nach Bemerkung 2.14. Falls $U_n \neq 0$, können wir eine kleinere Umgebung $\partial U_n \subseteq F'_n \subseteq F_n$ finden damit $U_n \setminus F'_n$ nichtleer wird. Setze $V_n := U_n \setminus F'_n$. Dann

$$U_n \subseteq V_n \cup F'_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Also V_j ist eine offene Überdeckung, die natürlich lokal endlich bleibt. □

Satz 2.19 (Zerlegung der Eins). *Sei* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *kompakt und* $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, *mit* $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen. Dann existiert* $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$ *mit*

(a) $\varphi_i \geq 0$

(b) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in K$

(c) $0 \leq \sum_{i=1}^n \varphi_i \leq 1$.

(d) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \Omega_j$

Beweis. Wähle V mit $\overline{V}$ kompakt und

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$$

nach Bemerkung 2.14. Setze $U_i; = V \cap \Omega_i$ und verwende Satz 2.18 □

Bemerkung 2.20. *Das System* $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *heißt* der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins *zu* K.

3. Sobolev Räume I.

In diesem Abschnitt es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

Definition 3.1 (Distributionelle Ableitung). *Sei* $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Falls die Identität*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

gilt, heißT G *die* distributionelle Ableitung *von* f, *und wir schreiben* $D^\alpha f = g$, $f^{(\alpha)} = g$ *oder* $f = \partial^\alpha g$.

Bemerkung 3.2.

(a) Die distributionelle Ableitung ist eindeutig, insbesondere ist die obige Definition sinnvoll, denn

$$\int_\Omega (f-g)\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f - g = 0 \text{ fast überall.}$$

(b) Falls $f \in C^m(\Omega)$. *Dann für jede* $|\alpha| \leq m$ *ist* $D^\alpha f$ *die klassische partielle Ableitung von* f.

Definition 3.3. *Sei* $m \in \mathbb{N}$ *und* $1 \leq p \leq \infty$. *Definiere*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq m \ \exists D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Satz 3.4. $W^{m,p}(\Omega)$ *ist ein Banachraum.*

Beweis. Klar: normierter Vektorraum. Um die Vollständigkeit zu zeigen, nehme $(f_n) \in W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge, d.h. die Folgen $(D^\alpha f_n) \subseteq L^p(\Omega)$ sind alle Cauchyfolgen. Daher konvergieren die auch, bezeichne die Grenzwerten mit f_α. Wir zeigen nun $D^\alpha f = f_\alpha$:

$$\int_\Omega f_\alpha \varphi \leftarrow \int_\Omega D^\alpha f_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_n D^\alpha \varphi \to (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi.$$

Die Behauptung folgt. □

Satz 3.5. *Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $W^{m,p}(\Omega)$ separabel und reflexiv. $W^{m,1}(\Omega)$ ist separabel.*

Beweis. Definiere die stetige Abbildung

$$J : W^{m,p}(\Omega) \to \underbrace{L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)}_{M} =: X,$$

wobei $M =$ die Anzahl der Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$ ist, durch $(Jf)(x) := (D^\alpha f)_{|\alpha|\leq m}$. Dann ist J stetig invertierbar, bildet also auf einen abgeschlossenen Unterraum von X ab. Falls $1 \leq p < \infty$ ist, ist X separabel, ist zusätzlich $p > 1$, folgt die Reflexivität von X. □

Lemma 3.6 (Lokale Approximation). *Sei $1 \leq p < \infty$, $f \in W^{m,p}(\Omega)$ und $D \subseteq \Omega$ offen mit $\overline{D} \subseteq \Omega$. Betrachte $\delta = \operatorname{dist}(D, \partial\Omega) > 0$ und den Mollifier η_ε, $\varepsilon < \delta$. Setze $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)$. Dann $f_\varepsilon \to f$ in $W^{m,p}(D)$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} D^\alpha f_\varepsilon(x) = D^\alpha \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)(x) &= \int_\Omega D^\alpha(\eta_\varepsilon(x-y)) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Träger!}}{=} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (D^\alpha f)_\varepsilon(x), \quad x \in D. \end{aligned}$$

Also $f_\varepsilon \in W^{m,p}(D)$ und nach Satz 2.16 $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha f)_\varepsilon \to D^\alpha f$. □

Satz 3.7. *Für $1 \leq p < \infty$ ist $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$.*

Beweis. Betrachte eine lokal endliche Überdeckung Ω_k von Ω, $\overline{\Omega_k} \subseteq \Omega$ kompakt (siehe Satz 2.18). Sei φ_k Zerlegung der Eins, $\varepsilon > 0$ und $c_k > 0$ später noch zu bestimmen. Für $\varepsilon > 0$ existiert nach Lemma 3.6 $f_{k,\varepsilon} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega_k)$ mit $\|f - f_{k,\varepsilon}\|_{W^{m,p}(\Omega_k} \leq c_k \varepsilon$. Setze

$$f_\varepsilon := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k f_{k,\varepsilon}, \text{ also } f_\varepsilon - f := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k (f_{k,\varepsilon} - f)$$

(lokal nur endlich viele Summanden). Die Produktregel gilt, denn für $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi_k f D_i \psi = \int_\Omega (D_i(\varphi_k \psi) - (D_i \varphi_k)\psi) f = -\int_\Omega ((\varphi_k \psi) D_i f + \psi f D_i \varphi_k).$$

Daher ist $\varphi_k f \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$D_i(\varphi_k f) = D_i \varphi_k \cdot f + \varphi_k D_i f.$$

Ferner gilt induktiv auch $\varphi_k f \in W^{m,p}(\Omega)$, und für $|\alpha| \leq m$

$$D^\alpha(\varphi_k f) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \varphi_k \cdot D^\beta f.$$

Wir erhalten

$$D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k\in\mathbb{N}} D^{\alpha-\beta}\varphi_k (D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f).$$

$$\begin{aligned}\|D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} &\le C \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} \|D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le C\varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k |\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} \le \varepsilon,\end{aligned}$$

falls $c_k \le 2^{-k}(\|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} + 1)^{-1}/C$. □

SATZ 3.8 (Produktregel). *Sei* $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und* $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $g \in W^{m,q}(\Omega)$. *Dann* $fg \in W^{m,1}(\Omega)$ *und* $D_i(fg) = D_i f \cdot g + f D_i g$.

BEWEIS. Sei $p < \infty$. Nehme $f_k \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $f_k \to f$. Wir haben gesehen $D_i(f_k g) = D_i f_k \cdot g + f_k D_i g$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega D_i\varphi \cdot fg &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega D_i\varphi \cdot f_k g = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi D_i(f_k g) \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(D_i f_k \cdot g + f_k D_i g) = -\int_\Omega \varphi(D_i f \cdot g + f D_i g).\end{aligned}$$

Der Rest folgt mit Induktion. □

SATZ 3.9 (Kettenregel). *Seien* $\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen, und* $\Phi : \Omega' \to \Omega$ *ein* C^1-*Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen* $D\Phi$, $D\Phi^{-1}$. *Sei* $1 \le p \le \infty$. *Dann gilt für* $f \in W^{1,p}(\Omega)$:

(a) $f \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega')$.
(b) $\partial(f \circ \Phi) = \partial f \circ \Phi \cdot \partial\Phi$.

BEWEIS. ÜA. □

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} W_0^{m,p}(\Omega) &:= \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}, \\ W_0^{m,p}(\Omega)_+ &:= \{u \in W_0^{m,p} : u \ge 0 \text{ f.ü.}\}, \\ C_c^\infty(\Omega)_+ &:= \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \varphi \ge 0\}. \end{aligned}$$

und

$$f^+ = \chi_{f>0} f,\ f^- = \chi_{f<0} f, \quad f \in L^p(\Omega).$$

LEMMA 3.10. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen.*

(a) $D_j f^+ = 1_{f>0} D_j f$, $D_j f^- = -1_{f<0} D_j f$ *fuer* $f \in W^{1,2}(\Omega)$
(b) $f \mapsto |f|$, f^+, f_- : $W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)$ *stetig.*
(c) $C_c^\infty(\Omega)_+$ *dicht in* $W_0^{1,2}(\Omega)_+$.
(d) Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $supp(u) \subset\subset \Omega$, *d.h. es existiert ein offenes* $D \subset \Omega$ *mit* $\operatorname{supp} u \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega$. *Dann ist* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Beweis. Ü.A. $\square$

Satz 3.11. *Sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Interval und $f \in W^{1,1}(I)$. Dann existiert eine Nullmenge N so, dass für $x, y \in I \setminus N$*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

gilt.

Beweis. Sei $f \in W^{1,1}(\Omega)$ und $f_k \in C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$ mit $f_k \to f$ in $W^{1,1}(I)$. Dann gilt

$$f_k(y) - f_k(x) = \int_x^y f_k'(z)\,\mathrm{d}z \to \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z.$$

Da f_k in $L^1(I)$ konvergiert, besitzt sie eine punktweis fast überall konvergente Teilfolge, also $\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(z) = f(z)$ für fast alle $z \in I$. $\square$

Satz 3.12. *Sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Interval und $f, g \in L^1(I)$ mit*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(z)\,\mathrm{d}z \quad \textit{für } x, y \in I \setminus N,$$

für eine Nullmenge N. Dann ist $f \in W^{1,1}(I)$ und $f' = g$.

Beweis. Sei $\psi \in C_c^\infty(I)$, und $c, d \in I$ so, dass $\operatorname{supp}\psi \in [c, d]$ und $f(y) - f(c) = \int_c^y g(z)\,\mathrm{d}z$ für fast alle $y \in I$. Dann

$$\begin{aligned}\int_c^d \psi'(y)(f(y) - f(c))\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \int_c^y \psi'(y) g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_x^d \psi'(y)\,\mathrm{d}y g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_c^d \psi(x) g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\square$

Satz 3.13. *Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Dann existiert ein $g \in C(\overline{I})$ so, dass $f = g$ fast überall.*

Beweis. Sei $I = (a, b)$. Definiere $h(y) := \int_a^y f'(z)\,\mathrm{d}z$. Die Funktion h ist stetig auf I, denn $f' \in L^1(I)$. Außerdem existiert $\lim_{x\to a,b} h(x)$, also $h \in C(\overline{I})$. Seien x, z so, dass $f(z) - f(x) = \int_x^z f'(z)\,\mathrm{d}z$. Sei $c := f(z) - h(z)$ und setze $g(y) := h(y) + c$. Nach Definition $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in I$. $\square$

Bemerkung 3.14. *Die obige Integralgleichung impliziert nicht nur Stetigkeit, sondern auch* Absolutstetigkeit. *Genauer ist Absolutstetigkeit äquivalent zu* (6) *(vgl. Maßtheorie).*

Satz 3.15. *Es sei* $1 \le p \le \infty$ *und* $I = (a, b)$. *Dann sind die Einbettungen* $W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ *stetig. Falls* $p > 1$, *ist die Einbettung* $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ *kompakt.*

Beweis. Es ist klar, dass die Einbettungen

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I)$$

stetig sind.
Es bleibt zu zeigen, dass $W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ stetig ist. Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Nach Satz 3.11 existiert eine Nullmenge N mit

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x, y \in I \setminus N.$$

Dann gilt

$$|f(y)| = \Big| f(x) + \int_x^y f' \Big| \le |f(x)| + \int_x^y |f'| \le |f(x)| + \|f'\|_{L^1(I)}.$$

Integration bzgl. x über I liefert

$$(b-a)|f(y)| \le \int_I |f(y)|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^1(I)} + (b-a)\|f'\|_{L^1(I)}, \quad y \in I \setminus N,$$

d.h. $\|f\|_{L^\infty(I)} \le C\|f\|_{W^{1,1}(I)}$. Da $C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$ dicht in $W^{1,1}(I)$ ist, folgt die Behauptung (Beachte: für $f \in C(\overline{I})$ gilt $\|u\|_{L^\infty(I)} = \|u\|_\infty$).
Nun sei $p > 1$ und $x, y \in I$ mit $x > y$. Dann gilt mit $1/p + 1/p' = 1$

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)|^p &\le \Big(\int_x^y |f'| \Big)^p \overset{\text{Hölder}}{\le} (x-y)^{p/p'} \int_x^y |f'|^p \le (x-y)^{p/p'} \int_a^b |f'|^p \\ &\le (x-y)^{p/p'} \|f\|^p_{W^{1,p}(I)}, \end{aligned}$$

d.h.

$$|f(x) - f(y)| \le (x-y)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{W^{1,p}(I)}, \quad f \in W^{1,p}(I).$$

Also ist $B_{W^{1,p}(I),1}(0) \subset C(I)$ gleichmäßig gleichgradig stetig. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Arzelà–Ascoli. □

4. Sobolev Räume II. – Einbettungssätze

Satz 4.1. *Für* $1 \le p < \infty$ *ist der Raum* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *dicht in* $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$, $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} \psi \subseteq B(0,2)$ und $\psi(x) = 1$ für $x \in \overline{B(0,1)}$. Setze $\psi_j(x) := \psi(x/j)$.

Beh. $\psi_j f \to f$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.
Die Produktregel (Satz 3.8) liefert

$$|D^\alpha(\psi_j f - f)| \le C \sum_{\beta\le\alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)| \cdot |D^{\alpha-\beta} f|,$$

also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha(\psi_j f - f)|^p &\le C' \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\beta\le\alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&= C' \sum_{\beta\le\alpha} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&\quad + C' \sum_{\beta\le\alpha} \int_{B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&= C' \sum_{\beta\le\alpha} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&\le C'' \sum_{\beta\le\alpha} \int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,j)} |D^{\alpha-\beta} f|^p \le \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

falls j groß genug ist.
Nun betrachten wir einen Mollifier (ρ_n). Dann hat $\rho_n * \psi_j f$ kompakten Träger und ist glatt. Nach Satz 2.9 und 2.16 gilt $D^\alpha(\rho_n * (\psi_j f)) = \rho_n * D^\alpha(\psi_j f) \to D^\alpha \psi_j f$ für $n \to \infty$. Sei also erst j groß und dann n genügend groß, so dass

$$\|f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \le \|f - \psi_j f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \|\psi_j f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon.$$

□

SATZ 4.2. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

mit stetiger Einbettung, d.h. für eine Konstante C_p

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C_p \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

BEWEIS. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $1 \le p < \infty$. Setze $G(s) := |s|^{p-1}s$. Dann gilt $\psi := G(\varphi) \in C_c^1(\mathbb{R})$ und $\psi' = G'(\varphi)\varphi' = p|\varphi|^{p-1}\varphi'$. Also erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$

$$G(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|\varphi(t)|^{p-1}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nach der Hölderschen Ungleichung folgt

$$|G(\varphi(x))| = |\varphi(x)|^p \le p\|\varphi\|_p^{p-1}\|\varphi'\|_p$$

und

$$|\varphi(x)| \le C\|\varphi\|_p^{(p-1)/p}\|\varphi\|_p^{1/p}.$$

Die Youngsche Ungleichung liefert

$$|\varphi(x)| \leq C\tfrac{p-1}{p}\|\varphi\|_p + C\tfrac{1}{p}\|\varphi'\|_p \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}. \tag{7}$$

Sei nun $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Nach Satz 4.1 existiert $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Mit (7) ist dann u_n eine Cauchyfolge in $L^\infty(\mathbb{R})$ und die Behauptung folgt. □

Lemma 4.3. *Sei $d \geq 2$ und $f_1, \dots, f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $1 \leq i \leq d$ setze*

$$\widetilde{x}_i := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$$

und sei

$$f(x) = f_1(\widetilde{x}_1) f_2(\widetilde{x}_2) \cdots f_n(\widetilde{x}_d) \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Beweis. Ü.A. □

Theorem 4.4 (Sobolev). *Sei $1 \leq p < d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^d), \qquad \textit{mit } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$$

stetig und es existiert $C = C_{p,d}$ mit

$$\|f\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla f\|_{L^p} \qquad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Beweis. *1. Schritt: $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$.*
Sei $1 \leq i \leq d$.

$$\begin{aligned}
|u(x_1, x_2, \dots, x_d)| &= \Big| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d)\, \mathrm{d}t \Big| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) \Big|\, \mathrm{d}t \\
&:= f_i(\tilde{x}_i).
\end{aligned}$$

Also $\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.
Es gilt $|u(x)|^d \leq \prod_{i=1}^d |f_i(\widetilde{x}_i)|$. Mit Lemma 4.3 folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d |f_i(\widetilde{x}_i)|^{\frac{1}{d-1}}\, \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^d \|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d-1}}.$$

Das heißt

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \le \prod_{i=1}^{d} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}}. \tag{8}$$

Wir wenden (8) auf $|u|^t$, $t > 1$ anstatt auf u an. Also, mit $1/p + 1/p' = 1$

$$\begin{aligned}\|u\|^t_{L^{\frac{td}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{td}{d-1}}(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{d-1}{d}} \le \prod_{i=1}^{d} \Big\|t|u|^{t-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \\ &\le t\prod_{i=1}^{d} \Big\||u|^{t-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \le t\|u\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^d)} \prod_{i=1}^{d} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}}.\end{aligned}$$

Wähle nun t so dass $\frac{td}{d-1} = p'(t-1)$, d.h. $t = \frac{d-1}{d}p^*$ (dann $t \ge 1$). Jetzt durch dividieren durch $\|u\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^d)}$ bekommen wir

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le t\prod_{i=1}^{d} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

die Behauptung für $u \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$.

2. Schritt: Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 4.1 wähle $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le C\|\nabla u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. Dies zeigt auch dass u_k eine Cauchyfolge in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ ist, deshalb ist sie konvergent. Eine Teilfolge konvergiert dann fast überall, benutzen wir die selbe Bezeichnung $u_k(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$. Also $u_k \to u$ in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$, und $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. □

BEMERKUNG 4.5. *Es genügt $C_{p,d} := \frac{(d-1)p}{d-p}$. Die optimale Konstante ist bekannt aber kompliziert.*

SATZ 4.6. *Sei $1 \le p < d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d), \qquad r \in [p, p^*]$$

stetig.

BEWEIS. Sei $p \le r \le p^*$. Für ein θ gilt $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Verwende dann die Interpolationsungleichung, die Youngsche Ungleichung und Theorem 4.4

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} &\le \|u\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|u\|^{1-\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le \theta\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + (1-\theta)\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\le C'\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

□

THEOREM 4.7 (Morrey). *Es sei $p > d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

stetig. Ferner existiert ein $C := C_{d,p}$ so, dass für alle $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\theta \|\nabla f\|_{L^p} \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $\theta = 1 - \frac{d}{p}$.

Beweis. *1. Schritt:* Sei $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Sei Q ein abgeschlossener Würfel $0 \in Q$ mit Seitenlänge r. Sei $x \in Q$, dann $u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx)\,\mathrm{d}t$. Daraus

$$|u(x) - u(0)| \le \int_0^1 \sum_{i=1}^d \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| |x_i| \,\mathrm{d}t \le r \sum_{i=1}^d \int_0^1 \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t.$$

Sei $\bar u = |Q|^{-1}\int_Q u(x)\,\mathrm{d}x$. Dann $|\bar u - u(0)| \le |Q|^{-1}\int_Q |u(x) - u(0)|$, und

$$\begin{aligned}
|\bar u - u(0)| &\le \tfrac{r}{|Q|} \int_Q \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \tfrac{r}{r^d} \int_0^1 \int_Q \sum_{i=1}^d \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{r^{d-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^d \int_{tQ} \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \mathrm{d}y \cdot \tfrac{1}{t^d}\,\mathrm{d}t \\
&\le \tfrac{1}{r^{d-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^d \Big(\int_Q \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right|^p \mathrm{d}y\Big)^{1/p} |tQ|^{1/q} \cdot \tfrac{1}{t^d}\,\mathrm{d}t \\
&\le \tfrac{1}{r^{d-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{d/q} \int_0^1 \tfrac{t^{d/q}}{t^d}\,\mathrm{d}t = \tfrac{r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}.
\end{aligned}$$

Natürlich können wir das ganze für x anstatt für 0 wiederholen und auch Q verschieben, also

$$|\bar u - u(x)| \le \frac{r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \text{für } x \in Q. \tag{9}$$

Daraus

$$|u(x) - u(y)| \le |u(x) - \bar u| + |\bar u - u(y)| \le \frac{2r^{1-d/p}}{1-d/p}\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \text{für } x, y \in Q.$$

Sei nun $x, y \in \mathbb{R}^d$. Es existiert ein Würfel Q der Seitenlänge $r = 2|x-y|$ mit $x, y \in Q$.

$$|u(x) - u(y)| \le \frac{C|x-y|^\theta}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

2. Schritt: Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Approximiere mit $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Wie im Beweis von Theorem 4.4 folgt

$$|u(x) - u(y)| \le \frac{C|x-y|^\theta}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

3. Schritt: Wir zeigen $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sei $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $Q \ni x$ der Einheitswürfel. Aus (9) folgt

$$|u(x)| \leq |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq \|u\|_{L^p(Q)} + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq C_{d,p}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Schließlich approximiere $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ mit $u_k \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. □

SATZ 4.8 (Der Fall $p = d$). *Die Einbettung*

$$W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d), \qquad q \in [d, \infty)$$

ist stetig.

BEWEIS. Ohne Beweis. □

KOROLLAR 4.9. *Sei $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1$) und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$

(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ *für alle* $r \in [p, \infty)$ $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$

(c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) *Sei* $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. *Setze*

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1$$

$\Longrightarrow$ *für jede* $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ *es existiert* C *mit*

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{W^{m,p}} \qquad \forall |\alpha| \leq k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta \qquad \text{fast alle } x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| = k.$$

Insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^d)$$

mit stetiger Einbettung.

BEWEIS. ÜA. □

5. Sobolev Räume III. - Gebiete

NOTATION 5.1. *Sei* $x \in \mathbb{R}^d$. *Dann* $x = (x', x_d)$ *mit* $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $x' = (x_1, \ldots, x_{d-1})$. *Wir setzen*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d_+ &:= \{x = (x', x_d) :\ x_d > 0\} \\ Q &:= \{x = (x', x_d) :\ |x'| < 1 \text{ und } |x_d| < 1\} \\ Q_+ &:= Q \cap \mathbb{R}^d_+ \\ Q_0 &:= \{x = (x', x_d) :\ |x'| < 1 \text{ und } x_d = 0\} \end{aligned}$$

DEFINITION 5.2. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen. Dann heißt* Ω von der Klasse C^m, *falls eine lokal endliche Überdeckung* $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ *des Randes* $\partial\Omega$ *und bijektive Abbildungen* $\Phi_j : Q \to U_j$ *existieren, so dass* Φ_j, Φ_j^{-1} *m-fach stetig differenzierbar mit* gleichmäßig *beschränkten Ableitungen sind und* $\Phi_j(Q_+) = U_j \cap \Omega$ *und* $\Phi_j(Q_0) = U_j \cap \partial\Omega$ *gelten.*

SATZ 5.3 (Fortsetzungsoperator). *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *beschränkt und von der Klasse* C^m *oder* $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. *Dann existiert für* $1 \leq p \leq \infty$ *ein linearer Operator* $F : L^p(\Omega) \to L^p(\mathbb{R}^d)$, *so dass für alle* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *mit* $k \leq m$ *gilt*

(a) $Fu\big|_\Omega = u$,
(b) $\|Fu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C_\Omega \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

BEWEISIDEE FÜR $m = 1$ UND Ω BESCHRÄNKT: Nach Voraussetzung kann man $\overline{\Omega}$ mit $U_0 = \Omega$ und endlich vielen U_l überdecken. Die zugehörigen bijektiven Abbildungen bezeichnen wir wieder mit Φ_l. Betrachte eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins (φ_l). Die Funktionen $\varphi_l f$ (eingeschränkt auf $\Omega \cap U_l$) liegen in $W^{1,p}(\Omega \cap U_l)$. Sei einfach

$$\tilde{f}_0(x) := \begin{cases} g_0(x) & x \in U_0 \\ 0 & x \notin U_0 \end{cases}.$$

Für $l > 0$ definiere $g_l := (\varphi_l f) \circ \Phi_l$. Dann gehört g_l zu $W^{1,p}(Q_+)$ nach Satz 3.9. Setze g_l, $l > 0$ auf Q so fort:

$$\tilde{g}_l((x', x_d)) := \begin{cases} g_l((x', x_d)) & (x', x_d) \in Q_+ \\ g_l((x', -x_d)) & (x', x_d) \notin Q_+ \cup Q_0. \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{g}_l \in W^{1,p}(Q)$ und $\|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C\|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}$ (dies ist noch zu beweisen!). Jetzt sei $\tilde{f}_l := \tilde{g}_l \circ \Phi_l^{-1}$. Dann gilt $\tilde{f}_l\big|_{\Omega\cap U_l} = (\varphi_l f)\big|_{\Omega\cap U_l}$ und $\tilde{f}_l$ ist null außerhalb von $\Phi_l^{-1}(Q)$. Betrachte jedes $\tilde{f}_l$ als eine Funktion definiert auf $\mathbb{R}^d$ (0 außerhalb U_l). Dann $\tilde{f}_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, also liegt die Funktion

$$\tilde{f} = \sum_{l=0}^{N} \tilde{f}_l$$

auch in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und sie ist eine Fortsetzung von f (nach Konstruktion). Die folgenden Abschätzungen gelten für $l > 0$:

$$\begin{aligned} \|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} &\leq C\|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(\Omega\cap U_l)}, & \|g_l\|_{L^p(Q_+)} &\leq C\|\varphi_l f\|_{L^p(\Omega\cap U_l)} \\ \|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} &\leq C\|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}, & \|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)} &\leq C\|g_l\|_{L^p(Q_+)} \\ \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} &\leq C\|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)}, & \|\tilde{f}_l\|_{L^p(U_l)} &\leq C\|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante C nur von Ω, von der Überdeckung und von den zugehörigen Funktionen Φ_l abhängt. Also

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} &\leq \sum_{l=0}^{N} \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \sum_{l=0}^{N} \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} \leq C' \sum_{l=0}^{N} \|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(U_l\cap\Omega)} \\ &\leq C''\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Analog folgt die Abschätzung im Fall $k = 0$. □

SATZ 5.4 (Dichtheit). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und von der Klasse C^m. Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ wobei $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Folge $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_n\big|_\Omega \to u$ in $W^{m,p}(\Omega)$, d.h. die Menge*

$$\left\{u\big|_\Omega : \; u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\right\}$$

ist ein dichter Unterraum von $W^{m,p}(\Omega)$.

BEWEIS. Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ und betrachte Fu. Satz 4.1 liefert eine Folge $(v_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - Fu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Die Folge $u_n := v_n\big|_\Omega$ hat die gewünschten Eigenschaften. □

KOROLLAR 5.5. *Sei $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1$), $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt von der Klasse C^m oder $\Omega = \mathbb{R}^d_+$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gelten die folgende Aussagen*

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$,
(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *für alle* $r \in [d, \infty)$,
(c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. *Setze*

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \qquad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\; 0 < \theta < 1$$

$\Longrightarrow$ *für jede* $f \in W^{m,p}(\Omega)$. *Dann existiert* C *mit*

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad \text{für alle } |\alpha| \leq k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}|x-y|^\theta \quad \text{für fast alle } x, y \in \Omega,\; |\alpha| = k.$$

Insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$$

mit stetiger Einbettung.

BEWEIS. Ü.A. □

SATZ 5.6 (Charakterisierungen von Sobolev Funktionen). *Es sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$. Äquivalent sind*

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$
(b) Es existiert $C > 0$

$$\left|\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}, \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\; i = 1, \ldots, d.$$

(c) Es existiert ein $C > 0$, so dass für jedes $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$ gilt

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} \leq C|h|.$$

BEMERKUNG 5.7. *Es kann $C = \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$ gewählt werden.*

Falls $p = 1$, so gilt (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)

BEWEIS. ÜA. $\square$

SATZ 5.8. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $1 \leq p < \infty$ und $M \subseteq L^p(\Omega)$ beschränkt. Es gelte*

(a) für alle $\varepsilon > 0$ und $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ existiert ein $0 < \delta < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$ mit

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon \quad \textit{für alle } h \in \mathbb{R}^d \textit{ mit } |h| < \delta \textit{ und für alle } f \in M,$$

wobei $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$.

(b) für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\Omega' \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega'}$ kompakt in Ω, so dass

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} < \varepsilon \quad \textit{für alle } f \in M.$$

Dann ist M relativ kompakt in $L^p(\Omega)$.

BEWEIS. (Skizze). Wir betrachten zunächst den Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$. Nach Voraussetzung (b) können wir $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'}$ kompakt in Ω wählen, so dass ein $C > 0$ mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} \leq C\varepsilon, \quad f \in M. \tag{10}$$

existiert. Sei η_n ein Mollifier und $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\|\eta_n * \Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{h \in B(0,\varepsilon)} \|\tau_h \Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{11}$$

Da $C_c(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist, existiert für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ eine Folge $(\Phi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{j \to \infty} \Phi_j = f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \eta_n * \Phi_j = \eta_n * f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d),$$
$$\lim_{j \to \infty} \tau_h \Phi_j = \tau_h f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

Damit folgt aus (11) und (a), dass

$$\lim_{n \to \infty} \|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} = 0$$

gleichmäßig für alle $f \in M$, d.h. es existiert ein $C > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} < C\varepsilon, \quad f \in M. \tag{12}$$

Wegen $\eta_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt insbesondere $\eta_n * f \in C(\overline{\Omega'})$. Mit Arzela-Ascoli folgt nun, dass

$$M' = \{\eta_n * f : f \in M\}$$

relativ kompakt ist.
Somit existieren nach (Adams, Sobolev Spaces) Theorem 1.19 (*Total beschränkt*) eine endliche Menge von Funktionen $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subset C(\overline{\Omega'})$ mit

$$M' \subset \bigcup_{i=1}^n B(\psi_i, \varepsilon).$$

Daher existiert ein $C > 0$, so dass für $f \in M$ ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$|\psi_j(x) - (\eta_n * f)(x)| < C\varepsilon, \quad x \in \overline{\Omega'} \tag{13}$$

existiert. Bezeichne die Erweiterung mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ von ψ mit $\tilde{\psi}$. Dann folgt aus (10), (11), (12) und (13), dass

$$\|f - \tilde{\psi}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

für ein $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt, d.h.

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(\tilde{\psi}_i, \varepsilon).$$

Daher ist M relativ kompakt.
Der allgemeine Fall folgt aus dem Spezialfall, wenn man die Menge $\tilde{M} = \{\tilde{f} : f \in M\}$, wobei $\tilde{f}$ die Erweiterung mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ von f bezeichnet, betrachtet. (s. Adams, Sobolev Spaces, Theorem 2.32) □

THEOREM 5.9 (Rellich). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt der Klasse C^1. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) $p < d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $r \in [1, p^*)$, wobei $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$ erfüllt ist;
(b) $p = d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $r \in [1, \infty)$;
(c) $p > d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$

jeweils mit kompakter Einbettung.

BEWEIS. (a) Sei B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir verwenden Satz 5.8. Sei $1 \leq r < p^*$. Dann existiert ein $\theta \in (0, 1]$ mit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Sei $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$. Die Interpolationsungleichung 1.11 und 5.6 liefern

$$\begin{aligned}\|\tau_h u - u\|_{L^r(\Omega')} &\leq \|\tau_h u - u\|^{\alpha}_{L^1(\Omega')} \|\tau_h u - u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\Omega')} \\ &\leq |h|^{\alpha} \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^1(\Omega)} (2\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \\ &\leq C|h|^{\alpha} \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C|h|^{\alpha},\end{aligned}$$

falls $u \in B$. Ferner gilt für solche u

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^r(\Omega \setminus \Omega')} &= \Big(\int_{\Omega \setminus \Omega'} |u(x)|^r \,\mathrm{d}x \Big)^{1/r} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \Omega')} |\Omega \setminus \Omega'|^{1-r/p^*} \\ &\leq |\Omega \setminus \Omega'|^{1-r/p^*} \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

falls Ω' geeignet gewählt ist.
(b) Analog.
(c) Sei $p > d$. Sei B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\Omega)$. Es ist zu zeigen, dass B relativ kompakt in $C(\overline{\Omega})$ ist. Korollar 5.5 liefert

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha} \qquad \forall f \in B,$$

mit $\alpha > 0$, d.h. B ist gleichmäßig gleichgradig stetig. Der Satz von Arzelà–Ascoli liefert die Behauptung.

□

SATZ 5.10 (Poincaré Ungleichung). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann existiert $C_\Omega > 0$ mit*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{für alle } f \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

BEWEIS. Sei $f \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\Omega \subseteq [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, und definiere $f = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned} |f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_d)|^p &= |f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_d) - f(x_1, \ldots, a_i, \ldots x_d)|^p \\ &= \Big| \int_{a_i}^{x_i} \partial_i f(x_1, \ldots, y_i, \ldots x_d) \Big|^p \, \mathrm{d}y_i \\ &\leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{x_i} |\partial_i f|^p \leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i f|^p. \end{aligned}$$

Daher

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (b_i - a_i)^{p/p'} (b_i - a_i) \|\partial_i f\|_{L^p(\Omega)}^p = (b_i - a_i)^p \|\partial_i f\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Da $(\sum_{i=1}^d |\partial_i f|^p)^{1/p} \leq M |\nabla f|$, so erhalten wir die gewünschte Ungleichung.

□

SATZ 5.11 (Einbettungssätze für $W_0^{1,p}(\Omega)$). *Die obigen Einbettungssätze gelten auch für $W_0^{1,p}$-Räume.*

BEWEIS. Klar, da $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$. □

BEMERKUNG 5.12 (Vektorwertige Sobolev-Räume). *Sei $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir definieren*

$$W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{f = (f_1, \ldots, f_m) : f_i \in W^{k,p}(\Omega),\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Dann gelten die Sätze für $W^{k,p}(\Omega)$ auch für vektorwertige Sobolev-Räume.

BEWEIS. Sätze komponentenweise anwenden. □

6. Sobolev Räume IV. Spuroperatoren

SATZ 6.1 (Spursatz (Halbraum)). *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\Gamma_{\mathbb{R}_+^d} : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \to L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ mit*

$$\Gamma_{\mathbb{R}_+^d} u = u|_{\partial \mathbb{R}_+^d}, \quad u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^d}).$$

BEWEIS. Ü.A. □

SATZ 6.2. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:*

$$u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \Leftrightarrow \Gamma_{\mathbb{R}_+^d} u = 0, \quad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Beweis. Die Richtung von links nach rechts ist klar. Sei nun $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ mit $\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u = 0$ und $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$. Wir bezeichnen die Fortsetzung von u mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ mit $\tilde{u}$ und zeigen, dass $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ liegt, wobei $D^\alpha \tilde{u}$ die Fortsetzung von $D^\alpha u$ mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \tilde{u}\varphi &= \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} D^\alpha u\varphi = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} D^\alpha u_n \varphi \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(-\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} u_n D^\alpha \varphi + \int\limits_{\partial\mathbb{R}^d_+} u_n\varphi \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} u_n D^\alpha\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} u D^\alpha \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{u} D^\alpha\varphi, \\ &|\alpha| \le 1,\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\end{aligned}$$

da

$$\left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^d_+} u_n\varphi \right| \le \|\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d-1})} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Daher liegt $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Da $h \mapsto T_{\vec{h}} u$ (vgl. 1. Übungsblatt) für $\vec{h} = (0,0,0,\dots,h)$ eine stetige Abbildung mit Werten in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ist, folgt die Behauptung nach Lemma 3.10 (d). □

Satz 6.3 (Spursatz). *Sei $1 \le p < \infty$ und $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^d_+$ beschränkt und von der Klasse C^1. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ mit*

$$\Gamma_\Omega u = u|_{\partial\Omega}, \quad u \in C_c^\infty(\overline{\Omega}).$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Überdeckung U_j des Randes von Ω. Wir bezeichnen wieder die zugehörigen Diffeomorphismen mit Φ_j. Weiter sei φ_j eine der Überdeckung U_j untergeordnete Zerlegung der Eins und $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \le \psi_j \le 1$ und $\operatorname{supp}\varphi_j \subset\subset \{\psi_j \equiv 1\}$. Wir definieren

$$\Gamma_\Omega u := \sum \varphi_j (\Gamma_{\mathbb{R}^d_+}(\psi_j u)\circ\Phi_j)\circ\Phi_j^{-1}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\Gamma_\Omega u)(x) &= \sum \varphi_j(x)(\Gamma_{\mathbb{R}^d_+}(\psi_j u)\circ\Phi_j)\circ\Phi_j^{-1}(x) \\ &= \sum \varphi_j(x)((\psi_j u)\circ\Phi_j)\circ\Phi_j^{-1}(x) = \sum \varphi_j(x)(\psi_j u)(x) \\ &= u(x), \quad x \in \partial\Omega,\ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

□

SATZ 6.4. *Sei* $1 \leq p < \infty$, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ *und von der Klasse* C^1. *Dann gilt:*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \Gamma_\Omega u = 0, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

BEWEIS. Ü.A. Lokalisierung unter Verwendung von Satz 6.2. $\square$

BEMERKUNG 6.5. *Es stellt sich die Frage, ob die Abbildung* $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ *surjektiv ist, d.h. kann jede* L^p*-Funktion auf dem Rand ins Innere fortgesetzt werden?*

Antwort: *Nein, man kann aber zeigen, dass* $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ *für* $1 < p < \infty$ *surjektiv ist. Hier:*

$$W^{s,p}(\partial\Omega) := \left\{ u \in L^p(\partial\Omega) : \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty \right\}, \quad s \in (0,1).$$

KAPITEL 3

Elliptische Randwertproblem in L^2

1. Elliptische Randwertprobleme

NOTATION 1.1. *Die Sobolevräume werden im Falle $p = 2$ mit $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ bzw. mit $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ bezeichnet.*

BEMERKUNG 1.2. *Die Räume H^m und H_0^m sind Hilberträume mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle := \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D_\alpha f \overline{D_\alpha g}.$$

Insbesondere sind sie reflexiv. Die Norm ist hier gegeben durch das Skalarprodukt

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} := \langle f, f\rangle^{1/2} := \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \big|D_\alpha f\big|^2\Big)^{1/2},$$

welches zu der $W^{m,2}$-Norm äquivalent ist.

Im Folgenden nehmen wir stillschweigend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ an, aber natürlich gelten die Resultate auch im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

LEMMA 1.3. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und von der Klasse C^1. Sei $(u_n) \subseteq H^1(\Omega)$ schwach konvergent gegen ein u. Dann konvergiert u_n in $L^2(\Omega)$ gegen u.*

BEWEIS. Die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt (siehe Theorem 5.9). Nehmen wir an, dass eine Teilfolge u_{n_k} existiert mit $\|u_{n_k} - u\|_{L^2(\Omega)} \geq \varepsilon$ für ein festes $\varepsilon > 0$ und für alle n_k. Diese Teilfolge wird auch mit u_n bezeichnet. Da (u_n) beschränkt in $H^1(\Omega)$ ist, hat es eine $L^2(\Omega)$-konvergente Teilfolge $u_{n_k} \to u'$. Aber $u_{n_k} \to u$ schwach in $H^1(\Omega)$ also auch schwach in $L^2(\Omega)$, was zu dem Widerspruch $u' = u$ führt. □

BEMERKUNG 1.4. *Natürlich gilt das obige Resultat für $W^{1,p}$ Räumei, so lange $1 < p < \infty$ ist.*

1.1. Elliptische Gleichungen 2. Ordnung mit Dirichlet Randbedingungen. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien $a_{ji} = a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq d$ und $a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $a_0(x) \geq 0$ für jedes $x \in \Omega$. Wir setzen im Folgenden die sogenannte *Elliptizitätsbedingung* voraus:

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > \alpha|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $\alpha > 0$, d.h. die Matrix mit den Einträgen (a_{ij}) ist positiv definit.

PROBLEM 1.5 (Dirichlet-Randbedingung). *Finde* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big) + a_0 u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Klassische Lösung: Eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, welche (P) erfüllt.

Schwache Lösung: Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\text{(SP)} \qquad +\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Schritt 1: Klassische Lösungen sind auch schwache Lösungen
Falls $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt auch $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Da $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, liegt u in $H_0^1(\Omega)$. Multiplikation mit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ und partielle Integration liefern (SP) für $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Der Dichtesatz 3.7 gibt (P) für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.
Schritt 2: Existenz von schwachen Lösungen
Seien nun $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des schwachen Problems (SP), mit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer von f unabhängigen Konstanten C.

BEWEIS. Setze

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv, \\ b(v) &:= \int_\Omega fv, \qquad v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Dann ist a eine stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C'\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass das lineare Funktional b stetig ist. Die Bilinearform a ist auch koerziv, denn

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u^2 \Big) \overset{\text{ellipt.}}{\geq} \int_\Omega \alpha |\nabla u|^2 + a_0 \int_\Omega |u|^2 \\
&\geq \alpha \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \alpha \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + (\alpha - \varepsilon) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{\text{Poincaré}}{\geq} \varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \tfrac{(\alpha-\varepsilon)}{C_\Omega^2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \Big(\tfrac{\alpha}{C_\Omega^2} - \varepsilon \Big(1 + \tfrac{1}{C_\Omega^2} \Big) \Big) \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ folgt die Koerzivität von a, d.h $a(u,u) \geq \varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, $u \in H_0^1(\Omega)$. Verwendung vom Lax–Milgram Lemma liefert die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung (vgl. ÜA).

Die schwache Lösung u erfüllt

$$
\|u\|^2_{H_0^1} \leq \frac{1}{\varepsilon} a(u,u) = \frac{1}{\varepsilon} b(u) = \int_\Omega f u \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.
$$

Dies zeigt $\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}$, also die gewünschte Normabschätzung. □

Schritt 3: Regularität der Lösung
Seien $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ für alle $x \in \Omega$ und Ω offen, beschränkt, von der Klasse C^2. Sei $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von (P). Dann gilt

(a) $u \in H^2(\Omega)$ und $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$.
(b) Ist $f \in H^m(\Omega)$ und $\partial\Omega$ der Klasse $C^{m+2} \implies u \in H^{m+2}(\Omega)$ und $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)}$.

Beweis. Siehe Kapitel 2. □

Korollar 1.6. *Sei $f \in H^m(\Omega)$ und $u \in H^{m+2}(\Omega)$ die schwache Lösung von* (P). *Die Sobolevschen Einbettungsätze 4.9 geben $W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega)$, falls $l > 2 + d/p$. Für $p = 2$ und $m > d/2$ gilt $u \in H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$.*

Schritt 4: Rückkehr zur klassischen Lösung
Sei $f \in H^m(\Omega)$ mit $m > d/2$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$. Ferner partielle Integration und Dichtheitsargument liefern die Existenz klassischer Lösungen.

2. L^2-Regularitätstheorie

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien $a_{ji} = a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq d$ und $b_i,\ a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq d$. Wir setzen die Elliptizitätsbedingung voraus. Wir untersuchen zunächst die Regularität von Lösungen der folgenden

Gleichung für $f \in L^2(\Omega)$.

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j\big(a_{ij}\partial_i u\big) + \sum_{i=1}^{d} b_i\partial_i u + a_0 u = f \quad \text{in } \Omega. \tag{14}$$

THEOREM 2.1 (Innere Regularität). *Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von* (14). *Dann ist $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ und für $V \subset\subset \Omega$ gilt:*

$$\|u\|_{H^2(V)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von Ω, V und a_{ij}, b_i und a_0 abhängt.

BEWEIS. Wir betrachten nur den Fall $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = a_0 = 0$. Zu $V \subset \Omega$ wähle $W_1 \subset \Omega$ und $W_2 \subset \Omega$ offen mit

$$\overline{V} \subset W_1 \subset \overline{W_1} \subset W_2 \subset \overline{W_2} \subset \Omega$$

und $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\xi = 1$ auf V, $\xi = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus W_1$ und $0 \le \xi \le 1$. Betrachte

$$\int_\Omega (\nabla\varphi)(\nabla u) = \int_\Omega \varphi f, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{15}$$

Setze $\varphi = -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$, wobei

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x+he_k) - u(x)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi f = \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u &= \int_\Omega \nabla\left(D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)\right)\nabla u = \int_\Omega \nabla\left((\xi^2 D_k^h u)\right) D_k^h \nabla u \\
&= \int_\Omega 2\xi(\nabla\xi) D_k^h u D_k^h \nabla u + \int_\Omega \xi^2 D_k^h(\nabla u) D_k^h \nabla u \\
&\ge -C\|D_k^h u\|_{L^2(W_1)} \|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)} + \|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\ge \frac{1}{2}\|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C\|\nabla u\|_{L^2(W_1)}^2.
\end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\le C\|\nabla(\xi^2 D_k^h u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C(\|2\xi\nabla\xi D_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi^2 \nabla D_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
&\le C\left(\|D_k^h u\|_{L^2(W_1)}^2 + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)}^2\right) \\
&\le C\left(\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)}^2\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}|\int_\Omega \varphi f| &\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}(\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)})\\ &\le C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(W_1)} + \frac{1}{4}\|\xi^2 D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Also,

$$\frac{1}{4}\|D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(V)} \le \frac{1}{4}\|\xi D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(W_1)})$$

für h klein genug, d.h. $\nabla u \in H^1(V)$ und

$$\|u\|_{H^2(V)} \le C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(W_1)}).$$

Wähle $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\eta = 1$ auf W_1, $\eta = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus W_2$ und $0 \le \eta \le 1$. Mit $\varphi = \eta^2 u$ in (15) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\varphi = \int_\Omega (\nabla\varphi)\nabla u &= \int_\Omega \eta^2(\nabla u)(\nabla u) + \int_\Omega 2\eta(\nabla\eta)u\nabla u\\ &\ge \|\eta\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|u\|_{L^2(W_2)}\|\eta\nabla u\|_{L^2(W_2)}\\ &\ge \frac{1}{2}\|\eta\nabla u\|^2_{L^2(W_2)} - C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}|\int_\Omega \varphi f| &\le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\le C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right),\end{aligned}$$

d.h.

$$\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} \le \|\eta\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Also

$$\|u\|_{H^1(W_2)} \le C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

□

THEOREM 2.2 (Höhere innere Regularität). *Sei* $a_{ij}, a_0, b_i \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\Omega)$ *und* $u \in H^1(\Omega)$ *eine schwache Lösung von* (14). *Dann ist* $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *und für* $V \subset\subset \Omega$ *gilt:*

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \le C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C *nur von* Ω, V *und* a_{ij}, b_i, a_0 *abhängt.*

Beweis. Der Fall $m=0$ ist klar. Wir betrachten nur den Fall $b_i = a_0 = 0$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und das Theorem gelte für m. Insbesondere gilt dann $u \in H^{2+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für alle $V \subset\subset \Omega$ existiert $C>0$ mit

$$\|u\|_{H^{2+m}(V)} \le C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \quad f \in H^m(\Omega). \tag{16}$$

Wir zeigen, dass das Theorem dann auch für $m+1$ gilt.
Sei $W \subset \Omega$ mit $\overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega$ und $|\alpha| = m+1$. Wähle $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(W)$ und $\varphi = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{\varphi}$. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\sum_{i,j=1}^d \int_\Omega a_{ij} \partial_i \tilde{\varphi} \partial_j \tilde{u} = \int_\Omega \tilde{\varphi} \tilde{f} \tag{17}$$

mit $\tilde{u} = D^\alpha u \in H^1(W)$ und

$$\tilde{f} = D^\alpha f - \sum_{\beta \le \alpha, \beta \ne \alpha} \left[- \sum_{i,j=1}^d \partial_i (D^{\alpha-\beta} a_{ij} D^\beta \partial_j u) \right].$$

Insbesondere folgt aus (16) $\tilde{f} \in L^2(W)$ und

$$\|f\|_{L^2(W)} \le C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Daher folgt mit Theorem 2.1

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(V)} \le C(\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}) \le C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

d.h. $\|u\|_{H^{m+3}(V)} \le C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$. □

Im nächsten Schritt betrachten wir das Problem

$$- \sum_{i,j=1}^d \partial_j \big(a_{ij} \partial_i u\big) + \sum_{i=1}^d b_i \partial_i u + a_0 u = f \text{ in } \Omega \tag{18}$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Theorem 2.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt von der Klasse C^2, $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (18). Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von Ω und a_{ij}, b_i, a_0 abhängt.

Beweis. Wir betrachten wieder nur den Fall $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = a_0 = 0$.
Schritt 1:
Sei $\Omega = B(0,1) \cap \mathbb{R}^d_+$ und setze $V = B(0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{R}^d_+$. Wähle $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\xi \equiv 1$ auf $B(0,\frac{1}{2})$, $\xi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)$ und $0 \le \xi \le 1$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}^d_+} = 0$ und

$$\int_\Omega (\nabla\varphi)(\nabla u) = \int_\Omega \varphi f, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

Für $k = 1, \dots, d-1$ setze $\varphi := -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$. Da

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\frac{1}{h} D_k^{-h}\left(\xi^2(x)\left[u(x+he_k) - u(x)\right]\right) \\ &= \frac{1}{h^2}\left(\xi^2(x-he_k)[u(x) - u(x-he_k)] - \xi^2(x)[u(x+he_k) - u(x)]\right), \\ &\quad x \in \Omega,\end{aligned}$$

folgt $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Wie im Beweis von Theorem 2.1 erhalten wir

$$\|D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(V)} \le C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right),$$

d.h. $\partial_k u \in H^1(V)$ für $k = 1, \dots, d-1$ und

$$\sum_{k,l=1,k+l<2d}^{d} \|\partial_k \partial_l u\|_{L^2(V)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{19}$$

Desweiteren gilt:

$$-\partial_d^2 u = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2 u - \Delta u = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2 u + f.$$

Damit (i. A. aus der Elliptizität)

$$\|\partial_d^2 u\|_{L^2(V)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{20}$$

Außerdem gilt:

$$\alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le \int_\Omega (\nabla u)(\nabla u) = \int_\Omega uf \le \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{21}$$

Aus (19), (20) und (21) folgt nun

$$\|u\|_{H^2(V)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

<u>Schritt 2:</u>
Sei nun Ω beliebig und wähle zu $x \in \partial\Omega$

$$\Phi_x : \Omega' := B(x,r) \cap \mathbb{R}^d_+ \to U(x),$$

$V' := B(x, r/2) \cap \mathbb{R}^d$ für ein $r > 0$ (vgl. Definition 5.2. Setze $V := \Phi_x(V')$. und $u' = u \circ \Phi_x$. Dann gilt $u' \in H^1(\Omega')$, $u|_{\partial\Omega' \cap \mathbb{R}^d_+} = 0$ und (dies ist noch zu Zeigen)

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a'_{ij} \partial_j \varphi' \partial_i u' = \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} b'_i \varphi' \partial_i u' + \int_\Omega a'_0 \varphi' u' + \int_\Omega \varphi' f',$$

mit $f' = f \circ \Phi_x$ und geeigneten a'_{ij}, b'_i und a'_0. Außerdem gilt (auch dies ist noch zu Zeigen)

$$\sum_{i,j=1}^{d} a'_{ij} \xi_i \xi_j \ge \alpha' |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Nach dem ersten Schritt ist $u' \in H^2(V')$ und es gilt

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq C(\|f'\|_{L^2(\Omega')} + \|u'\|_{L^2(\Omega')}),$$

wobei $C > 0$ unabhängig von f' ist. Also ist $u \in H^2(V)$ und es gilt

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

mit einer von f unabhängigen Konstante C.
Da $\partial\Omega$ kompakt ist, können wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen $V_1, \dots, V_N$ überdecken. Dies liefert zusammen mit der inneren Regularität die gewünschte Abschätzung. □

Analog zu Theorem 2.2 erhalten wir

THEOREM 2.4. *Sei $a_{ij}, b_i, a_0 \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\Omega)$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von* (18)*. Dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von Ω und a_{ij}, b_i, a_0 abhängt.

BEWEIS. Ohne Beweis. □

KOROLLAR 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ von der Klasse C^2, $b_i = 0$, $a_0(x) \geq 0$ für $x \in \Omega$, $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von* (18)*. Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei C nur von Ω und a_{ij}, a_0 abhängt.

BEWEIS. Lax-Milgram liefert $\|u\|_{H^1}(\Omega) \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$. (Die Einschränkung an die Koeffizienten liefert die Koerzivität). □

KAPITEL 4

Temperierte Distributionen und die Fouriertransformation

In diesem Kapitel entwickeln wir die wesentlichen Eigenschaften der Fouriertransformation. Für unsere Zwecke notwendig ist dabei eine Einführung in die Theorie der Distributionen, die wir voranstellen wollen. Wir werden uns hier jedoch auf temperierte Distributionen beschränken.

1. Temperierte Distributionen

Definition 1.1 (Schnell fallende Funktionen). *Eine Funktion* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *heißt* schnell fallend*, falls für alle Multiindizes* α, $\beta \in \mathbb{N}^n$

$$d_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{|x^\alpha D^\beta \varphi(x)|\} < \infty.$$

Wir bezeichnen die Menge aller schnell fallenden Funktionen mit $\mathcal{S}$*. Weiter versehen wir* $\mathcal{S}$ *mit der Topologie, die von der Menge der Halbnormen* $\{d_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}$ *induziert wird.*

Bemerkung 1.2. *(a) Nach Definition konvergiert eine Folge* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ *gegen* $\varphi \in \mathcal{S}$*, wenn* $d_{\alpha,\beta}(\varphi_n - \varphi) \to 0$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ *gilt.*

(b) Der Raum der schnell fallenden Funktionen ist ein Fréchet-Raum. Denn eine abzählbare Familie von Halbnormen ist gegeben durch

$$d_j(\varphi) := \sup_{|\alpha|=j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{(1 + |x|^2)^j |D^\alpha \varphi(x)|\},\ j \in \mathbb{N}.$$

und

$$d(\varphi, \psi) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-j} d_j(\varphi - \psi)}{1 + d_j(\varphi - \psi)}$$

definiert eine Metrik auf $\mathcal{S}$ *mit der dieser Raum vollständig ist.*

Definition 1.3. *Der Dualraum von* $\mathcal{S}$ *(versehen mit der schwach-* Topologie) heißt der Raum der temperierten Distributionen und wird mit* $\mathcal{S}'$ *bezeichnet. D.h.:*

$$\mathcal{S}' := \{f : \mathcal{S} \to \mathbb{C} : f \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Wir schreiben $\langle f, \varphi\rangle$ *für die duale Paarung zwischen* $\mathcal{S}'$ *und* $\mathcal{S}$*.*

Bemerkung 1.4. *(a) Eine Folge* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'$ *konvergiert gegen* $T \in \mathcal{S}'$*, falls* $\langle T_n - T, \varphi\rangle \to 0$ *für alle Testfunktionen* $\varphi \in \mathcal{S}$*.*

(b) *Die Definition der Ableitung stimmt für stetig differenzierbare Funktionen mit der üblichen Definition der Ableitung überein.*

Beispiele 1.5. (a) *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar mit $\int (1+|x|^2)^{-r} f(x) \mathrm{d}x < \infty$ für ein $r \geq 0$. Dann definiert*
$$T_f(\varphi) := \int f \varphi \,\mathrm{d}x$$
eine temperierte Distribution. Insbesondere ist also in diesem Sinne $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$ für $1 \leq p \leq \infty$.

(b) *Das Auswertfunktional $\delta(\varphi) := \varphi(0)$ definiert ebenfalls eine temperierte Distribution die sogenannte Diracsche δ-Distribution.*

(c) *Cauchy Hauptwert:*
Durch
$$ch - \frac{1}{x}(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$
wird eine Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definiert.

Beweis. Einfach, bzw. in den Übungen. □

Definition und Satz 1.6. *Es seien $T \in \mathcal{S}'$, $\psi \in \mathcal{S}$ und p ein Polynom.*

(a) *Die Ableitung D_i in Richtung $i = 1, \dots, d$ ist definiert durch*
$$\langle D_i T, \varphi \rangle := -\langle T, D_i \varphi \rangle.$$

(b) *Die Multiplikation von T mit ψ bzw. p ist definiert durch*
$$\langle \psi T, \varphi \rangle := \langle T, \psi \varphi \rangle \quad \varphi \in \mathcal{S}$$
$$\langle p T, \varphi \rangle := \langle T, p \varphi \rangle \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

Diese Definitionen sind wohldefiniert, d.h. für $\alpha \in \mathbb{N}^d$ gilt $D^\alpha T$, pT, $\psi T \in \mathcal{S}'$.

Beweis. Übung □

Mit Hilfe der Notation $\tilde{\tau}_x g(y) := g(x-y)$ übertragen wir die Faltung auf Distributionen.

Definition 1.7 (Faltung von Distributionen mit Funktionen). *Es seien $T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann definieren wir die Faltung $T * \varphi$ durch*
$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle.$$

Satz 1.8. *Es seien $T \in \mathcal{S}'$ und $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, dann gilt $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $D_j(T * \varphi) = (D_j T) * \varphi = T * (D_j \varphi)$.*

Beweis. 1. $T * \varphi$ ist stetig:
Es gilt $\tilde{\tau}_z \varphi(y) - \tilde{\tau}_x \varphi(y) = \varphi(z-y) - \varphi(x-y)$ und damit folgt $\tilde{\tau}_z \varphi(y) \to \tilde{\tau}_x \varphi(y)$ in $\mathcal{S}$, falls $z \to x$ (MWS). Also $\langle T, \tilde{\tau}_z \varphi \rangle \to \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle$ und damit $\lim_{z \to x} (T * \varphi)(z) = (T * \varphi)(x)$.

2. Differenzierbarkeit: Es sei $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und e_i der i-te Einheitsvektor. Dann gilt

$$\frac{1}{h}\left(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\right)(y) = \frac{1}{h}\left(\varphi(x+he_i-y) - \varphi(x-y)\right).$$

Wie oben folgt daher $\frac{1}{h}\left(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\right) \overset{h\to 0}{\to} \tilde{\tau}_x(\partial_i\varphi)$ in $\mathcal{S}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
\partial_i(T*\varphi)(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\langle T, \tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\rangle \\
&= \lim_{h\to 0}\langle T, \frac{1}{h}\left(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\right)\rangle \\
&\overset{T \text{ stetig}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x\partial_i\varphi\rangle \\
&\overset{\text{Def}}{=} \left(T*\partial_i\varphi\right)(x)
\end{aligned}$$

und damit existiert die partielle Ableitung von $T*\varphi$ mit $\partial_i(T*\varphi) = T*\partial_i\varphi$. Insbesondere ist damit $\partial_i(T*\varphi)$ eine stetige Funktion. Mit Induktion folgt schließlich $(T*\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

3. $\partial_i(T*\varphi) = (\partial_i T)*\varphi$:

Es gilt $(\partial_i\varphi)(x-y) = -(\partial_i\varphi(x-\cdot))(y)$, also ist auch $\partial_i(\tilde{\tau}_x\varphi) = -\tilde{\tau}_x(\partial_i\varphi)$ damit rechnen wir unter Verwendung von Obigem

$$\begin{aligned}
\partial_i(T*\varphi)(x) &= (T*\partial_i\varphi)(x) = \langle T, \tilde{\tau}_x(\partial_i\varphi)\rangle \\
&= \langle T, -\partial_i(\tilde{\tau}_x\varphi)\rangle = \langle \partial_i T, \tilde{\tau}_x\varphi\rangle = \left((\partial_i T)*\varphi\right)(x).
\end{aligned}$$

□

2. Die Fouriertransformation

Definition 2.1. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist die Fouriertransformation von f definiert durch*

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemma 2.2. *Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $\hat{f} \in \mathrm{BC}(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Beweis. Es sei $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $(\xi_k) \subset \mathbb{R}^d$ mit $\xi_k \to \xi$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty}|\hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\xi)| \leq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\left|\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_k\rangle} - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\right| \overset{\text{Lebesgue}}{=} 0,$$

d.h. $\hat{f}$ ist stetig. Desweiteren gilt:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

□

Satz 2.3. *Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

(a) $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{g}$.

(b) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(c) Es sei $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Dann gilt

$$\partial^\alpha \hat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha f}.$$

(d) Es sei $f \in W^{k,1}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$

(e) Es gilt $\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R}^d)\right) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ (Riemann-Lebesgue).

Beweis. (a) Wir erhalten mit Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi) \, \mathrm{d}\xi &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x g(\xi) \, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{g}(x) \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mathrm{e}^{-i\langle y,\xi\rangle} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \mathrm{e}^{-i\langle x-y,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mathrm{e}^{-i\langle y,\xi\rangle} \hat{f}(\xi) \, \mathrm{d}y = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

(c) Da $\partial_\xi^\alpha \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} = (-ix)^\alpha \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}$ gilt, folgt für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\partial_j \hat{\varphi}(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi+he_j\rangle} - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}}{h} \, \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Lebesgue}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} -ix_j \varphi(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x \\ &= \widehat{(-ix)^{e_j} \varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \ j = 1, \ldots, d.\end{aligned}$$

Approximiere f mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(d) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:

$$\widehat{\partial_j \varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\partial_j \varphi)(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)(-i\xi_j) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x$$
$$= (i\xi)^{e_j} \hat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \ j = 1, \ldots, d.$$

Approximiere $f \in W^{k,1}(\mathbb{R}^d)$ mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(e) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt $\partial_x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Insbesondere folgt aus (d), dass $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{\varphi}(\xi) = 0$, d.h. $\hat{\varphi} \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Approximiere $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

□

Beispiel 2.4. *Sei $a > 0$ und $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|^2}$. Dann gilt:*

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Beweis. Sei $d = 1$. Dann gilt

$$(\hat{f})'(\xi) = (\widehat{-ix)\mathrm{e}^{-a|x|^2}}(\xi) = \left(\widehat{\frac{i}{2a}(\mathrm{e}^{-a|x|^2})'}\right)$$
$$= \frac{i}{2a}(i\xi)\hat{f}(\xi) = -\frac{1}{2a}\xi\hat{f}(\xi).$$

Damit folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\mathrm{e}^{\frac{|\xi|^2}{4a}}\hat{f}(\xi)\right) = 0;$$

also ist $\mathrm{e}^{|\xi|^2/4a}\hat{f}(\xi)$ konstant. Die Konstante ergibt sich aus

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a|x|^2} \, \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Somit erhalten wir die Behauptung für $d = 1$. Der allgemeine Fall folgt nun mit Fubini:

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^d \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ax_j^2} \mathrm{e}^{-ix_j\xi_j} \, \mathrm{d}x_j = \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

□

Notation 2.5. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definieren wir*

$$\check{f}(\xi) := \hat{f}(-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

THEOREM 2.6 (Inversionsformel der Fouriertransformation). *Seien* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$*. Dann gilt:*

$$(\hat{f})\check{} = \widehat{\check{f}} = f, \qquad f.\ \ddot{u}.$$

BEWEIS. Für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ setze

$$\varphi_{x,t}(z) := \mathrm{e}^{i\langle x,z\rangle}\mathrm{e}^{-t^2|z|^2}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{x,t}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x-\xi,z\rangle}\mathrm{e}^{-t^2|z|^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}t^d}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t^2}}\\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}t^d}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t^2}} := (2\pi)^{\frac{d}{2}}g_t(x-\xi),\end{aligned}$$

wobei $g(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\mathrm{e}^{-|x|^2/4}$ und $g_t(x) := 1/t^d g(x/t)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{x,t}(\xi)\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat{\varphi}_{x,t}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\xi)g_t(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{\frac{d}{2}}(f * g_t)(x).\end{aligned} \tag{22}$$

Man zeigt (vgl. Mollifier)

$$\lim_{t\to 0}\|f * g_t - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Desweiteren gilt:

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{x,t}(\xi)\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{\frac{d}{2}}(\hat{f})\check{}(x). \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt $f = (\hat{f})\check{}$. Analog zeigt man $f = \widehat{\check{f}}$. □

KOROLLAR 2.7. *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *und* $\hat{f} = 0$*. Dann gilt* $f = 0$*.*

BEWEIS. Klar. □

THEOREM 2.8 (Plancherel). *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$*. Dann ist* $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *und die Abbildung* $\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)}$ *kann eindeutig zu einem unitärem Isomorphismus* $\mathcal{F}_2$ *auf* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *fortgesetzt werden.*

BEWEIS. Sei $X := \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$. Dann ist insbesondere $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. $X \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Ferner ist X dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$, da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset X$.

Seien $f, g \in X$ und $h := \overline{\hat{g}}$. Dann gilt:

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\overline{\hat{g}}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x} = \overline{g(\xi)},$$

d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\overline{g} = \int_{\mathbb{R}^d} f\hat{h} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}h = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}\overline{\hat{g}}.$$

Insbesondere folgt mit $g = f$, dass $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ gilt. Da $\mathcal{F}X = X$ kann $\mathcal{F}|_X$ zu einem unitären Isomorphismus $\mathcal{F}_2$ fortgesetzt werden.
Es bleibt zu Zeigen, dass

$$(\mathcal{F}_2 f)(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d).$$

Sei $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$$
$$\lim_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Einerseits gilt $\lim_{j\to\infty} \|\hat{f} - \hat{\varphi}_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0$, d.h.

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B(0,R)} |\hat{\varphi}_j(\xi) - \hat{f}(\xi)| \,\mathrm{d}\xi = 0, \quad R > 0.$$

Andererseits folgt mit Plancherel

$$\lim_{j\to\infty} \|\hat{\varphi}_j - \mathcal{F}_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

d.h.

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B(0,R)} |\hat{\varphi}_j(\xi) - \mathcal{F}_2 f(\xi)| \,\mathrm{d}\xi = 0, \quad R > 0.$$

Damit folgt $\mathcal{F}_2 f(\xi) = \hat{f}(\xi)$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. □

Satz 2.9 (Hausdorff-Young-Ungleichung). *Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0$ mit $p \in [1,2]$. Der Operator $\mathcal{F}$ kann zu einem stetigen Operator $\mathcal{F}_{p,q} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden. Es gilt:*

$$\|\mathcal{F}_{p,q}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^d), L^q(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{p} - \frac{d}{2}}}.$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ stetig sind. Daher folgt die Behauptung aus dem Riesz–Thorin Konvexitätstheorem (man ersetze ∞ durch 2). □

Bemerkung 2.10. *Für $p > 2$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{f}$ i. A. keine Funktion mehr (vgl. Distributionen-Theorie).*

Beweis. Ohne Beweis. □

Satz 2.11. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

(a) Sei $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \le k$. Dann gilt

$$\partial^\alpha \hat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha f}.$$

(b) Sei $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \le k$.

Beweis. Nach Satz 2.3 gilt die Behauptung für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Approximiere $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und nutze Plancherel. □

Satz 2.12. *Die Fouriertransformation ist ein topologischer Isomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$.*

Beweis. Wegen einfacherer Notation setzen wir zunächst $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{N}^d$ Wir verwenden Satz 2.3 und erhalten für $\varphi \in \mathcal{S}$ und α, $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(\xi)| &= |\xi^\alpha (-1)^{|\beta|} \mathcal{F}(x\beta\varphi)| \\
&= |\mathcal{F}(D^\alpha(-x)^\beta \varphi)| \\
&\le \frac{1}{(2\pi)d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha(x^\beta \varphi(x))| \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^{-m}(1+|x|^2)^m |D\alpha(x^\beta\varphi(x))| \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wählen wir m so, dass $\int(1+|x|^2)^{-m}\,\mathrm{d}x = M < \infty$ gilt, so folgt

$$|\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(\xi)| \le \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^m |D\alpha(x^\beta \varphi(x))| M \tag{24}$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt, folgt somit auch $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$. $\mathcal{F}$ ist linear und mit (24) folgt auch, dass $\mathcal{F}\varphi_n \to 0$, falls $\varphi_n \to 0$, also ist $\mathcal{F}$ stetig.
Mit Theorem 2.6 folgt schließlich die Bijektivität und die Stetigkeit von $\mathcal{F}^{-1}$, da $\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \mathcal{F}\varphi(-x)$. □

Setzt man die Fouriertransformation in natürlicher Weise auf komplexe Variablen fort, so erhalten wir die folgende Verbindung zwischen holomorphen Funktionen und Funktionen mit kompaktem Träger. Wir bemerken hierzu noch, dass eine Funktion $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ holomorph ist, wenn sie in jeder Koordinate holomorph ist.

Satz 2.13 (Paley-Wiener). *Eine ganze holomorphe Funktion $F(\zeta) : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ ist genau dann die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit* $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$, *d.h.*

$$F(\zeta) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle\zeta,x\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wenn es für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante C_N gibt, so dass

$$|F(\zeta)| \leq C_N(1+|\zeta|)^{-N}\mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}\,\zeta|}. \tag{25}$$

Beweis. Es sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$. Dann folgt mit partieller Integration für jedes $\beta \in \mathbb{N}^d$ mit $|\beta| = N$

$$\begin{aligned}|(i\zeta)^\beta F(\zeta)| &= |(2\pi)^{-d/2} \int\limits_{B(0,R)} \mathrm{e}^{-i\langle\zeta,x\rangle}\partial^\beta f(x)\,\mathrm{d}x| \\ &\leq \mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\zeta|R}(2\pi)^{-d/2} \int\limits_{B(0,R)} |\partial^\beta f(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Für die Rückrichtung definieren wir zunächst

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle\xi,x\rangle}F(\xi). \tag{26}$$

Die Inversionsformel liefert nun, dass $\hat{f}(\xi) = F(\xi)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt, da aus der Glattheit von F folgt, dass $\check{F} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt.
Zur Eingrenzung des Trägers von f differenzieren wir zunächst (26) unterm Integralzeichen. Dies ist durch die Voraussetzung (25) gerechtfertigt. Es folgt somit

$$\partial^\beta f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}(i\xi)^\beta F(\xi)\,\mathrm{d}x \tag{27}$$

Wir setzen nun für ein $\alpha > 0$ $\eta = \alpha\frac{x}{|x|}$ und wenden Cauchys Integralsatz sukzessive auf (26) an und erhalten

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi+i\eta\rangle}F(\xi+i\eta)\,\mathrm{d}\xi$$

wobei die Integrale über die Wege in imaginärer Richtung wegen (25) im Grenzfall verschwinden.
Für $N = d{+}1$ erhalten wir nun wieder mit der Voraussetzung die Abschätzung

$$|f(x)| \leq C\mathrm{e}^{R|\eta|-\langle x,\eta\rangle} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|)^{-d-1}\,\mathrm{d}\xi.$$

Da dies für beliebige $\alpha > 0$ gilt, folgt (mit $\alpha \to \infty$) für $|x| > R$, dass $f(x) = 0$. Also folgt $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$. $\square$

Definition und Satz 2.14. *Sei $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $T_m : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, $T_m f := \mathcal{F}_2^{-1}(m\mathcal{F}_2 f)$ ein stetiger Operator mit*

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Die Funktion m heißt Fourier–Multiplikator.

Beweis. Plancherel liefert

$$\begin{aligned}\|T_m f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|\mathcal{F}_2^{-1}(m\mathcal{F}_2 f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|m\mathcal{F}_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|\mathcal{F}_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),\end{aligned}$$

d.h. $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $0 < |\Omega| \leq 1$ mit $\inf_{x\in\Omega}|m(x)| \geq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} - \varepsilon$.
Dann gilt für $\varphi = \chi_\Omega$

$$\begin{aligned}\|T_m(\mathcal{F}_2^{-1}\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|m\mathcal{F}_2\mathcal{F}_2^{-1}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|m\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\geq \Big(\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} - \varepsilon\Big)\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

d.h. $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. □

Bemerkung 2.15. *Man kann zeigen, dass $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine notwendige Bedingung ist.*

Definition 2.16. *Die Fouriertransformation für temperierte Distributionen ist definiert durch $\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle := \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle$, $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$.*

Satz 2.17. *Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist stetig. Ist $\psi \in \mathcal{S}$ und ist $T_\psi \in \mathcal{S}'$ die von ψ erzeugte Distribution (via $\langle T_\psi, \varphi\rangle := \int \psi\varphi$), so gilt $\hat{T}_\psi = T_{\hat{\psi}}$.*

Beweis. $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$ folgt aus der Stetigkeit von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}$, da für $\varphi_k \to \varphi$

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi_k\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi_k\rangle \to \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle$$

gilt.
Die Stetigkeit von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}'$ folgt ähnlich, denn für $T_k \to T$ in $\mathcal{S}'$ folgt

$$\langle \hat{T}_k, \varphi\rangle = \langle T_k, \hat{\varphi}\rangle \to \langle T, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{T}, \varphi\rangle$$

□

Satz 2.18. *Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}'$ mit Inverser $\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle$.*

Beweis. Es sei $T \in \mathcal{S}'$ und $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

also folgt $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id_{\mathcal{S}'}$ und analog $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}'}$. □

KAPITEL 5

Singuläre Integraloperatoren

1. Interpolation von Operatoren

Wir werden uns in diesem Abschnitt einen Spezialfall des Interpolationssatzes von Marcinkiewicz beweisen. Für diesen Satz definieren wir zunächst die folgenden Begriffe. Im folgenden sei (M, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum.

Definition 1.1. *Es sei T eine Abbildung, die messbare Funktionen auf M auf messbare Funktionen auf M schickt. Weiter sei $1 \leq q < \infty$ und $1 \leq p < \infty$. Dann ist T vom* schwachen (p, q)-Typ*, falls es eine Konstante A gibt, so dass für alle $f \in L^p(M)$ und alle $\lambda > 0$*

$$\mu(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{A\|f\|_p}{\lambda}\right)^q.$$

Die Abbildung ist vom schwachen (p, ∞)-Typ*, falls es eine Konstante A gibt mit*

$$\|Tf\|_\infty \leq A\|f\|_p$$

Schließlich sagen wir, dass T vom starken (p, q)-Typ *ist, falls für ein A*

$$\|Tf\|_q \leq A\|f\|_p$$

gilt.

Definition 1.2. *Es sei T wie in Definition 1.1. Die Abbildung T heißt sublinear, falls*

$$|T(f + g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|.$$

Wesentlich für den Beweis des MArcinkiewicz-Satzes ist die folgende Darstellungsformel für die L^p-Norm

Lemma 1.3. *Es seien $1 \leq p < \infty$ und $f : M \to \mathbb{K}$ eine messbare Funktion. Dann gilt für alle $f \in L^p(M)$*

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty \mu(\{x : |f(x)| > \lambda\})\lambda^{p-1}\, \mathrm{d}\lambda.$$

Beweis. Für eine einfache Funktion $\alpha\chi_A$ gilt offensichtlich die Gleichung $\|f\|_p^p = \alpha^p \mu(A)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty \mu(\{x : |f(x)| > \lambda\})\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda &= p\int_0^\alpha \mu(A)\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \mu(A)[\lambda^p]_0^\alpha \\ &= \alpha^p. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität des Integrals folgt damit die Aussagen auch für Treppenfunktionen. Für eine beliebige messbare Funktion f wählen wir eine monotone Folge von Treppenfunktionen T_n mit $T_n \to |f|$ (punktweise). Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt dann $\|T_n\|_p \to \|f\|_p$. Außerdem ist A_n, wobei $A_n(\lambda) := \{x : |T_n(x)| > \lambda\}$ eine wachsende Folge von messbaren Mengen mit $A_n(\lambda) \to A(\lambda) = \{x : |f(x)| > \lambda\}$, d.h. $\cup A_n = A$. Eine weitere Anwendung des Satzes von Beppo-Levi ergibt

$$p\int_0^\infty \mu(A_n(\lambda))\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda \to p\int_0^\infty \mu(A(\lambda))\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Für einen Maßraum M bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathcal{M}(M)$ die Menge aller messbaren Funktionen von M nach $\mathbb{C}$. Weiter definieren wir die Zerlegung einer Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ durch $f = f_\lambda + f^\lambda$ wobei

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} f, & \text{falls } |f| \le \lambda \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $f^\lambda = f - f_\lambda$. Nun können wir zum Beweis des Satzes von Marcinkiewicz kommen.

Theorem 1.4 (Marcinkiewicz Interpolationssatz). *Es seien $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$ und (M, Σ, μ) bzw. (N, Π, ν) σ-endliche Maßräume. Weiter sei $D(T) \subset \mathcal{M}(M)$ und $T : D(T) \to \mathcal{M}(N)$ eine sublineare Abbildung. Außerdem sei $D(T)$ abgeschlossen unter Zerlegung, d.h. $f_\lambda \in D(T)$, falls $f \in D(T)$.*
Ist T vom schwachen (p_j, p_j)-Typ für $j = 0, 1$, dann ist T vom starken (p, p)-Typ für jedes $p \in (p_0, p_1)$. Ist $p_1 < \infty$ so gilt

$$\|Tf\|_p \le 2\left(\frac{pA_0^{p_0}}{p - p_0} + \frac{p_1 A_1^{p_1}}{p_1 - p}\right)^{1/p} \|f\|_p.$$

Im Fall $p_1 = \infty$ gilt

$$\|Tf\|_p \le (1 + A_1)\left(\frac{pA_0^{p_0}}{p - p_0}\right)^{1/p} \|f\|_p.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $p_1 < \infty$. Für $f \in D(T)$ sei $f_\lambda + f^\lambda = f$ die Zerlegung zu $\lambda > 0$. Aus der Sublinearität von T folgt $\{x : |Tf(x)| > 2\lambda\} \subset \left\{x : |Tf_\lambda(x)| + |Tf^\lambda(x)| > 2\lambda\right\} \subset \{x : |Tf_\lambda(x)| > \lambda\} \cup$

$\left\{x : |Tf^\lambda(x)| > \lambda\right\}$, da für ein x aus der linken Menge $|Tf_\lambda(x)| > \lambda$ oder $|Tf^\lambda(x)| > \lambda$ gilt. Da T vom schwachen (p_j, p_j)-Typ ist gilt weiter

$$\begin{aligned}\nu\left(\{x : |Tf(x)| > 2\lambda\}\right) &\leq \nu\left(\left\{x : |Tf^\lambda(x)| > \lambda\right\}\right) + \nu\left(\{x : |Tf_\lambda(x)| > \lambda\}\right) \\ &\leq \left(\frac{A_0\|f^\lambda\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0} + \left(\frac{A_1\|f_\lambda\|_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 1.3 und der Substitution $2z \to \lambda$ folgt

$$\begin{aligned}2^{-p}\|Tf\|_p^p &= 2^{-p}p\int_0^\infty \nu\left(\{x : |Tf(x) > z\}\right) z^{p-1}\,\mathrm{d}z \\ &= p\int_0^\infty \nu\left(\{x : |Tf(x) > 2\lambda\}\right)\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda \\ &\leq p\int_0^\infty \left(A_0\|f^\lambda\|_{p_0}\right)^{p_0}\lambda^{-p_0+p-1}\,\mathrm{d}\lambda + p\int_0^\infty \left(A_1\|f_\lambda\|_{p_1}\right)^{p_1}\lambda^{-p_1+p-1}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= A_0^{p_0}pp_0\int_0^\infty\int_0^\infty \mu\left(\left\{x : |f^\lambda(x)| > \tau\right\}\right)\tau^{p_0-1}\,\mathrm{d}\tau\lambda^{p-p_0-1}\,\mathrm{d}\lambda \\ &\quad + A_1^{p_1}pp_1\int_0^\infty\int_0^\lambda \mu\left(\{x : |f_\lambda(x)| > \tau\}\right)\tau^{p_1-1}\,\mathrm{d}\tau\lambda^{p-p_1-1}\,\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}$$

da $|f_\lambda| < \lambda$ gilt. Zur weiteren Abschätzung betrachten wir zunächst den zweiten Term der rechten Seite. Mit

$$\mu\left(\{x : |f_\lambda(x)| > \tau\}\right) \leq \mu\left(\{x : |f(x)| > \tau\}\right)$$

und dem Satz von Tonelli folgt

$$\begin{aligned}&pp_1\int_0^\infty\int_0^\lambda \mu\left(\{x : |f_\lambda(x)| > \tau\}\right)\tau^{p_1-1}\,\mathrm{d}\tau\lambda^{p-p_1-1}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= pp_1\int_0^\infty \mu\left(\{x : |f(x)| > \tau\}\right)\int_\tau^\infty \lambda^{p-p_1-1}\,\mathrm{d}\lambda\tau^{p_1-1}\,\mathrm{d}\tau \\ &\leq \frac{pp_1}{(p_1-p)}\int_0^\infty \mu\left(\{x : |f(x)| > \tau\}\right)\tau^{p-1}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{p_1}{p_1-p}\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Für die Abschätzung des ersten Terms von oben bemerken wir zunächst, dass

$$\mu\left(\left\{x : |f^\lambda(x)| > \tau\right\}\right) = \mu\left(\{x : |f(x)| > \tau\}\right), \quad \text{falls } \tau > \lambda \text{ und}$$
$$\mu\left(\left\{x : |f^\lambda(x)| > \tau\right\}\right) = \mu\left(\{x : |f(x)| > \lambda\}\right), \quad \text{falls } \tau \leq \lambda.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} & pp_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \mu\left(\left\{x : |f^\lambda(x)| > \tau\right\}\right) \tau^{p_0-1} \,\mathrm{d}\tau \lambda^{p-p_0-1} \,\mathrm{d}\lambda \\ = \; & pp_0 \int_0^\infty \int_\lambda^\infty \mu\left(\{x : |f(x)| > \tau\}\right) \tau^{p_0-1} \,\mathrm{d}\tau \lambda^{p-p_0-1} \,\mathrm{d}\lambda \\ & + p \int_0^\infty \mu\left(\{x : |f(x)| > \lambda\}\right) \lambda^{p-1} \,\mathrm{d}\lambda \\ = \; & \left(\frac{p_0}{p-p_0} + 1\right) \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\|Tf\|_p^p \leq 2^p \left(\frac{pA_0^{p_0}}{p-p_0} + \frac{p_1 A_1^{p_1}}{p_1 - p}\right) \|f\|_p^p.$$

Für den Fall $p_1 = \infty$ bemerken wir zunächst, dass falls $|Tf(x)| > (1 + A_1)\lambda$ auch die Ungleichung

$$(1 + A_1)\lambda < |Tf_\lambda(x)| + |Tf^\lambda(x)| \leq A_1\lambda + |Tf^\lambda(x)|$$

gilt, da T vom schwachen (∞, ∞)-Typ ist. Damit folgt dann $|Tf^\lambda(x)| > \lambda$. Das heißt, es gilt die Beziehung

$$\{x : |Tf(x) > (1 + A_1)\lambda\} \subset \left\{x : |Tf^\lambda(x) > \lambda\right\}.$$

Wir können nun wie folgt abschätzen

$$
\begin{aligned}
(1+A_1)^{-p}\|Tf\|_p^p &= (1+A_1)^{-p} p \int\limits_0^\infty \nu\left(\{x : |Tf(x) > \lambda\}\right) \lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= p \int\limits_0^\infty \nu\left(\{x : |Tf(x) > (1+A_1)\lambda\}\right) \lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda \\
&\leq p \int\limits_0^\infty \nu\left(\left\{x : |Tf^\lambda(x) > 1\lambda\right\}\right) \lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= p \int\limits_0^\infty \left(\frac{A_0\|f^\lambda\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0} \lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= pA_0^{p_0} p_0 \int\limits_0^\infty p \int\limits_0^\infty \mu\left(\left\{x : |f^\lambda(x)| > \tau\right\}\right) \tau^{p_0-1}\,\mathrm{d}\tau \lambda^{p-p_0-1}\,\mathrm{d}\lambda \\
&\leq \frac{A_0^{p_0}}{p-p_0}\|f^\lambda\|_p^p \leq \frac{A_0^{p_0}}{p-p_0}\|f\|_p^p
\end{aligned}
$$

□

2. Calderón-Zygmund-Theorie

Wir wollen nun Abbildungen $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ betrachten, die sich über einen Integralkern definieren lassen. Eine Funktion $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt Integralkern von T, falls K auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x,y) : x = y\}$ lokal integrierbar ist (d.h. integrierbar auf kompakten Teilmengen) und für $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ die Gleichung

$$
Tf(g) = \int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

gilt.

Definition 2.1. *(a) Ein Integralkern K heißt Calderón-Zygmund-Kern, falls K stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x,y) : x = y\}$ ist und*

(i) $|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}$

(ii) $|\nabla_x K(x,y)| + |\nabla_y K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}$

gilt.

(b) Es sei T ein Operator mit Calderón-Zygmund-Kern. Ist T stetig auf $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ fortsetzbar, so heißt T Calderón-Zygmund-Operator.

Das Ziel dieses Abschnitts ist es zu beweisen, dass sich Calderón-Zygmund-Operatoren beschränkt auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 < p < \infty$ fortsetzen lassen. Dies ist eines der zentralen Themen der Harmonischen Analysis. Wir werden später sehen, dass sich mit Hilfe dieser Theorie Existenzresultate für partielle Differentialgleichungen von L^2 nach L^p für $p \neq 2$ übertragen lassen. Das Hauptresultat dieses Abschnitts lautet also

THEOREM 2.2. *Es sei T ein Calderón-Zygmund-Operator. Dann gibt es für $p \in (1, \infty)$ eine Konstante $C > 0$, so dass $\|Tf\|_p \leq C\|f\|_p$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Wir werden den Beweis fühtren indem wir mit Hilfe einer Zerlegung für integrierbare Funktionen zeigen, dass Calderón-Zygmund-Operatoren vom schwachen $(1, 1)$-Typ sind und anschließend den Interpolationssatz von Marcinkiewicz anwenden.
Wir kommen also nun zur angesprochenen Zerlegung und legen zunächst ein paar Bezeichnungen fest, die uns das (Notations-)Leben etwas erleichtern.

NOTATION 2.3. *Wir beginnen mit der Menge aller achsenparalleler Würfel mit Seitenlänge 1 und ganzzahligen Ecken. Diese Menge nennen wir $\mathcal{D}_0$. Für eine ganze Zahl k entsteht die Menge $\mathcal{D}_k$ von Würfeln indem wir die Skalierung $x \to 2^k x$ auf jedes Element in $\mathcal{D}_0$ anwenden. Das heißt, die Würfel in $\mathcal{D}_k$ haben Seitenlänge 2^k und entstehen, wenn man die Seiten der Würfel in $\mathcal{D}_{k-1}$ halbiert. Eine wichtige Eigenschaft der Menge aller so entstehenden Würfel $\mathcal{D} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k$, die* dyadischen *Würfel, ist die folgende: Für zwei Würfel W und W' gilt entweder, dass einer im anderen enthalten ist oder, dass sie disjunktes Inneres haben.*

LEMMA 2.4 (Calderón-Zygmund-Zeregung). *Es seien $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\lambda > 0$. Dann gibt es eine Familie von dyadischen Würfeln W_k mit paarweise disjunktem Inneren, so dass $|f(x)| \leq \lambda$ f.ü. in $\mathbb{R}^d \setminus \cup_{k \in \mathbb{Z}} W_k$ und*

$$\lambda < \frac{1}{|W_k|} \int\limits_{W_k} |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq 2^d \lambda.$$

Insbesondere lässt sich f zerlegen in $f = g + b$, wobei $|g(x)| \leq 2^d \lambda$ f.ü., $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$ und $b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k$. Für die Funktionen b_k gilt weiter $\operatorname{supp} b_k \subset W_k$, *$\int_{\mathbb{R}^d} b_k = 0$ und $\|b_k\|_1 \leq 2 \int_{W_k} |f(x)| \, \mathrm{d}x$.*

BEWEIS. Es sei $\mathcal{E}$ die Menge aller dyadischen Würfel $W \in \mathcal{D}$, die die Bedingung

$$\frac{1}{|W|} \int\limits_{W} |f(x)| \, \mathrm{d}x > \lambda \tag{28}$$

erfüllen. Da $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, folgt, dass ein Würfel W mit $\|f\|_1 \leq \lambda |W|$ nicht in $\mathcal{E}$ enthalten ist. Die Seitenlängen der Würfel in $\mathcal{E}$ ist also beschränkt. Damit gibt es zu jedem Würfel $W' \in \mathcal{E}$ einen größten Würfel $W \in \mathcal{E}$, der W' enthält. Die Menge aller dieser maximalen Würfel nennen wir $\mathcal{W} := \{W_k\}$. Ist W_k' ein größerer dyadischer Würfel, der W_k enthält, dann ist W_k' nicht in $\mathcal{E}$ und daher kann für diesen Würfel die Ungleichung (28) nicht gelten. Damit folgt

$$\int\limits_{W_k} |f(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{W_k'} |f(x)| \,\mathrm{d}x \leq |W_k'|\lambda = 2^d |W_k|\lambda. \tag{29}$$

Die geforderten Bedingungen für die Familie von Würfel gilt also.
Die Funktionen b_k werden definiert durch $b_k := f - |W_k| \int_{W_k} f(x) \,\mathrm{d}x$ auf W_k und 0 sonst. Mit $b = \sum_k b_k$ stzen wir $g = f - b$. Die Eigenschaft $\in b_k = 0$ folgt unmittelbar aus der Definition. Die Dreiecksungleichung liefert weiter

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |b_k(x)| \,\mathrm{d}x \leq 2 \int\limits_{W_k} |f(x)| \,\mathrm{d}x$$

Weiter gilt $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$, da in W_k $g = |W_k|^{-1} \int_{W_k} f(x) \,\mathrm{d}x$.
Es bleibt noch $|g(x)| \leq 2^d$ zu zeigen. Auf jedem Würfel W_k folgt diese Ungleichung mit (29). Für $x \in (\cup_k W_k)^c$ gibt es eine Folge von dyadischen Würfeln, so dass die Seitenlängen gegen Null konvergieren, x enthalten und die Ungleichung (28) nicht gilt. Da $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und damit fast alle Punkte Lebesgue-Punkte von g sind, folgt daher $|g(x)| \leq \lambda$ fast überall. □

Lemma 2.5. *Es sei K ein Calderón-Zygmund-Kern und $r > 0$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $|x - y| \leq r$ die Ungleichung*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B_{2r}(x)} |K(z,x) - K(z,y)| \,\mathrm{d}z \leq C.$$

Beweis. Mit dem Mittelwertsatz und den Eigenschaften von Calderón-Zygmund-Kernen folgt für $y \in B_r(x)$ und $z \in \mathbb{R}^d \setminus B_{2r}(x)$, dass

$$\begin{aligned} |K(z,x) - K(z,y)| &\leq |x-y| \sup_{w \in B_r(x)} |\nabla_w K(z,w)| \\ &\leq 2^{n+1} C_K |x-y||x-z|^{-n-1}. \end{aligned} \tag{30}$$

Hier benutzten wir außerdem die Dreiecksungleichung für $|w - z| \geq |x - z| - |w - x| \geq |x - z|/2$, wobei die letzte Ungleichung für $|x - y| \leq r$ und $|x - z| \geq 2r$ gültig ist. Schließlich folgt die Behauptung durch Integration von (30), denn mit Kugelkoordinaten folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B_{2r}(x)} |K(z,x) - K(z,y)| \,\mathrm{d}z &\leq C_K 2^{n+1} \omega_{n-1} \int\limits_{2r}^{\infty} r^{-n-1} r^{n-1} \,\mathrm{d}r \\ &= C_K 2^n \omega_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Nun können wir Theorem 2.2 beweisen.

Beweis. Wir zeigen zunächst die schwache $(1, 1)$ Abschätzung für Calderón-Zygmund-Kerne. Hierzu werden wir gelegentlich die Ungleichung

$$\|f\|_p^p \geq \int\limits_{\{f(x)>\varepsilon\}} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \geq \varepsilon^p |\{f > \varepsilon\}| \tag{31}$$

benutzen. Es sei nun $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\lambda > 0$. Die Calderón-Zygmund-Zerlegung auf f angewendet liefert Funktionen b und g mit $f = g + b$ und den in Lemma 2.4 genannten Eigenschaften. Es gilt offensichtlich

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subset \{x : |Tg(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tb(x)| > \lambda/2\}.$$

Mit der L^2 Beschränktheit folgt damit

$$\begin{aligned}
|\{x : |Tg(x)| > \lambda/2\} &\leq \frac{C}{\lambda^2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |Tg(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{C}{\lambda^2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

da $|g(x)| \leq C\lambda$ gilt. Schließlich folgt wegen $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$

$$|\{x : |Tg(x)| > \lambda/2\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Wir können uns also nun der Abschätzung von Tb zuwenden.
Es sei $O_\lambda = \cup_k B_k$, wobei B_k Kugeln um die Mittelpunkte x_k der Würfel W_k mit Radius $\sqrt{n}\cdot$ Seitenlänge von W_k. Das heißt aber, dass für $y \in W_k$ der Abstand $|x_k - y|$ zu x_k höchstens die Hälfte des Radius von B_k beträgt. Dies benötigen wir für die Anwendung von Lemma 2.5. Für das Volumen von O_λ gilt.

$$|O_\lambda| \leq C \sum_k |Q_k| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_k \int\limits_{Q_k} |f| \,\mathrm{d}x \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Als nächstes schötzen wir Tb_k ab. Für $x \notin Q_k$ gilt, da die b_k Mittelwert 0 haben, dass $Tb_k(x) = \int K(x, y) b_k(y) \,\mathrm{d}y = \int (K(x, y) - K(x, x_k)) b_k(y) \,\mathrm{d}y$. Anwendung des Satzes von Fubini und Lemma 2.5 liefert

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B_k} |Tb_k(x)| \,\mathrm{d}x &\leq \int\limits_{Q_k} |b_k(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B_k} |K(x, y) - K(x, x_k)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&\leq C \int\limits_{Q_k} |b_k(y)| \,\mathrm{d}y \leq C \int\limits_{Q_k} |f(y)| \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Summation über k ergibt schließlich

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus O_\lambda} |Tb(y)|\,\mathrm{d}y \le \sum_k \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B_k} |Tb_k(y)|\,\mathrm{d}y \le C\|f\|_1. \tag{32}$$

Damit folgt also unter Verwendung von (31) und (32)

$$\begin{aligned}|\{x : Tb(x) > \frac{\lambda}{2}\}| &\le |O_\lambda| + |\{x \in \mathbb{R}^d \setminus O_\lambda : |Tb(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| \\ &\le |O_\lambda| + \frac{2}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus O_\lambda} |Tb(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{C}{\lambda}\|f\|_1\end{aligned}$$

Insgesamt ist damit die schwach $(1,1)$ Bedingung für Tf erfüllt.
Die L^p-Beschränktheit von T für $1 < p < 2$ folgt nun mit der L^2-Beschränktheit und dem Interpolationssatz von Marcinkiewicz.
Für $2 < p < \infty$ folgt die Aussage durch Dualisieren, indem man erkennt, dass die Adjungierte von T also T^* ein Calderón-Zygmund-Operator ist, falls T ein solcher ist. T^* ist daher nach dem ersten Teil $L^{p'}$-Beschränkt, wobei p' der zu p konjugierte Hölder-Exponent ist. Damit ist dann T L^p-Beschränkt. □

3. Fouriermultiplikationsoperatoren

In der Theorie partieller Differentialgleichungen ist es oftmals nützlich für die Lösbarkeit die zu untersuchenden Operatoren als Calderón-Zygmund-Operatoren zu erkennen und so geeignete Abschätzungen zu erhalten. Insbesondere L^p-Abschätzungen für die Lösung zu linearen Problemen kann dazu dienen nichtlineare Gleichungen zu behandeln.
Häufig erhält man aber durch Anwenden der Fouriertransformation nur explizite Lösungsformeln in Form von sogenannten Symbolen. Wendet man etwa die Fouriertransformation auf die Gleichung $(\lambda - \Delta)u = f$ an so erhält man $(\lambda + |\xi|^2)\hat{u} = \hat{f}$. Eine Lösung dieser Gleichung wäre also formal durch $u = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}f$ gegeben. In dieser Formel ist nicht so schnell ersichtlich, ob dies ein Calderón-Zygmund-Operator ist oder nicht. Deshalb wollen wir im Folgenden Operatoren obiger Form untersuchen und als Hauptziel eine hinreichende Bedingung angeben, die die L^p-Beschränktheit des Operators sichert.

Definition 3.1. *Eine Funktion $m : \mathbb{R}^d\setminus\{0\} \to \mathbb{K}$ heißt* Symbol der Ordnung *k, falls m beliebig oft differenzierbar ist und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^d$ eine Konstante C_α existiert, so dass*

$$\left|\frac{\partial^\alpha m}{\partial \xi^\alpha}(\xi)\right| \le C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|-k}. \tag{33}$$

Wir geben zunächst ein paar nützliche Rechenregeln für Symbole an.

LEMMA 3.2. *(a) Ist m_j für $j = 1, 2$ ein Symbol der Ordnung k_j, dann ist $m_1 m_2$ ein Symbol der Ordnung $k_1 + k_2$ und $m_1 + m_2$ ein Symbol der Ordnung k. Jede der Konstanten in der Abschätzung* (33) *für $m_1 m_2$ (bzw. $m_1 + m_2$) hängt nur von endlich vielen der Konstanten für m_1 und m_2 ab.*

(b) Ist $\eta \in \mathcal{S}$, dann ist η ein Symbol der Ordnung k für jedes $k \leq 0$.

(c) Ist m ein Symbol der Ordnung k, dann ist $\varepsilon^{-k} m(\varepsilon\xi)$ ein Symbol der Ordnung k und die Konstanten in (33) *können unabhängig von ε gewählt werden.*

Den Beweis überlassen wir dem Leser.

LEMMA 3.3. *Es sei $m \in \mathcal{S}$ und $k > -d$. Dann gibt es eine Konstante C, die nur von endlich vielen der Konstanten für m in* (33) *abhängt mit*

$$|\mathcal{F}^{-1} m(x)| \leq C|x|^{-d-k}.$$

BEWEIS. Wir wählen eine Abschneidefunktion $\eta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger, so dass $\eta_0(\xi) = 1$ für $|\xi| < 1$ und $\eta_0(\xi) = 0$ für $|\xi| > 2$ gilt. Wir setzen $\eta_\infty = 1 - \eta_0$. Damit definieren wir

$$K_j(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{ix\xi} \eta_j(\xi|x|) m(\xi)\, d\xi,$$

wobei $j = 0, \infty$. Wir schätzen K_j jeweils getrennt ab. Für K_0 gilt

$$|K_0(x)| \leq C(2\pi)^{-d} \int\limits_{|\xi|<2/|x|} |\xi|^k\, d\xi = C|x|^{-k-d}$$

Für den $j = \infty$ Teil schreiben wir zunächst $(ix)^\alpha e^{ix\xi} = \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha} e^{ix\xi}$ und integrieren partiell. Dies ergibt

$$\begin{aligned}(ix)^\alpha K_\infty(x) &= \int \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha} e^{ix\xi}\right) \eta_\infty(\xi|x|) m(\xi)\, d\xi \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int e^{ix\xi} \frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha} \left(\eta_\infty(\xi|x|) m(\xi)\right)\, d\xi.\end{aligned}$$

Mit (33), Lemma 3.2 und da η_∞ Null in der Nähe von 0 ist, folgt für $k - |\alpha| > -d$

$$|(ix)^\alpha K_\infty(x)| \leq C \int\limits_{|\xi|>1/|x|} |\xi|^{k-|\alpha|}\, d\xi = C|x|^{-d-k+|\alpha|}.$$

Damit folgt die Ungleichung $|K(x)| \leq C|x|^{-d-k}$ □

Damit können wir nun das zentrale Resultat dieses Abschnitts beweisen.

THEOREM 3.4. *Ist m ein Symbol der Ordnung* 0*, dann ist $T_m = \mathcal{F}^{-1} m \mathcal{F}$ ein Calderón-Zygmund-Operator.*

Beweis. Die L^2-Beschränktheit des Operators T_m folgt aus $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ nach Definition und Satz 2.14. Wir zeigen nun noch, dass der Kern von T_m von der Form $K(x-y)$ ist und K Abschätzungen der Form

$$|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} K(x)| \leq C|x|^{-n-|\alpha|} \tag{34}$$

erfüllt. Da die inverse Fouriertransformation von m nicht notwendigerweise durch eine Funktion gegeben ist, approximieren wir m zunächst durch schnell fallende Funktionen. Hierzu nehmen wir $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi(x) = 1$ für $|x| < 1$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| > 2$. Wir setzen dann $m_\varepsilon(\xi) = \varphi(\varepsilon\xi)(1-\varphi(\xi/\varepsilon))m(\xi)$. Wegen Lemma 3.2 ist m_ε ein Symbol der Ordnung 0 mit von ε unabhängigen Konstanten. Außerdem gilt $m_\varepsilon \in \mathcal{S}$ und damit gelten wegen Lemma 3.3 die Abschätzungen (34) für $K_\varepsilon := \mathcal{F}^{-1}m_\varepsilon$. Dies folgt aus den Eigenschaften der Fouriertransformation, da die α-te Ableitung von K_ε die inverse Fouriertransformation von $(-i\xi)^\alpha m_\varepsilon(\xi)$ ist und $(-i\xi)^\alpha m_\varepsilon(\xi)$ ein Symbol der Ordnung $|\alpha|$ ist.

Da die Konstanten nicht von ε abhängen, können wir den Satz von Arzela-Ascoli zusammen mit einem Diagonalfolgenargument anwenden. Arzela-Ascoli liefert für eine Kugel um 0 und ein $\alpha \in \mathbb{N}^d$ eine Folge α-ter Ableitungen von K_ε, die auf der abgeschlossenen Kugelschale $\overline{B(0,r)} \setminus B(0, 1/r)$, für $r > 1$ gleichmäßig konvergiert. Nun lässt sich mit Hilfe des Diagonalfolgenarguments eine Teilfolge von K_ε konstruieren, so dass für eine Funktion K die Teilfolge $K_{\varepsilon_j} \to K$ und alle ihre Ableitungen gleichmäßig gegen K, bzw. die entsprechende Ableitung von K konvergiert. Der Kern K erfüllt dann natürlich auch die Abschätzungen (34).

Es bleibt also noch zu zeigen, dass T_m durch den Kern K dargestellt werden kann. Es sei $f \in \mathcal{S}$. Mit dem Satz von Lebesgue und dem Satz von Plancherel folgt $T_{m_\varepsilon} f \to T_m f$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$ für $\varepsilon \to 0$. Nach Definition von K_ε und den Eigenschaften der Fouriertransformation, Satz 2.3 gilt $T_{m_\varepsilon} f = K_\varepsilon * f$. Haben f und g disjunkten und jeweils kompakten Träger, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} T_m f(x) g(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} T_{m_{\varepsilon_j}} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (L^2-\text{Konv.})\\
&= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K_{\varepsilon_j}(x-y) f(y) g(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K(x-y) f(y) g(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad (\text{glm. Konv.})
\end{aligned}$$

und damit folgt, dass T_m durch den Kern K dargestellt werden kann. □

Ein Dichteschluss zusammen mit Theorem 2.2 und Theorem 3.4 liefert nun abschließend

Korollar 3.5. *Ist m ein Symbol der Ordnung 0, dann ist $T_m : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ für $1 < p < \infty$ ein stetiger Operator.*

Als erste Anwendung des Multiplikatorensatzes wollen wir uns nun mit Besselpotentialräumen und ihrem Zusammenhang zu den Sobolevräumen beschäftigen. Die Besselpotentialräume liefern eine Möglichkeit gebrochene Ableitungen zu definieren und so eine kontinuierliche Skala verschiedener Glattheit zu erhalten.

Definition 3.6. *Für $s \geq 0$ und $1 < p < \infty$ heißt*

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^p(\mathbb{R}^d) : \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f \in L^p(\mathbb{R}^d)\}$$

der Besselpotenzialraum *der Ordnung s. Eine Norm auf $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ wird durch $\|f\|_{H^{s,p}} = \|\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f\|_p$ definiert.*

Lemma 3.7. *$H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ ist ein Banachraum.*

Beweis. Übung □

Dass die Besselpotenzialräume wirklich eine Skala bzgl. der Glattheit liefert zeigt der folgende Satz.

Satz 3.8. *Ist $s \in \mathbb{N}$, dann gilt $W^{s,p}(\mathbb{R}^d) = H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für gerade s. Für ungerade ist der Beweis schwieriger und technisch aufwändiger. Ist s gerade, so ist $(1+|\xi|^2)^{s/2} = P_s(\xi)$ ein Polynom vom Grad s. Da für $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ auch $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ für alle $|\alpha| \leq s$ gilt, folgt mit der Eigenschaft der Fouriertransformation, dass $P(-i\partial)f = \mathcal{F}^{-1}P_s(\xi)\mathcal{F}f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und somit $W^{s,p}(\mathbb{R}^d) \subset H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$.
Umgekehrt ist $\frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}$ ein Mikhlin Symbol für jedes $|\alpha| \leq s$ und daher folgt $\|\mathcal{F}^{-1}\xi^\alpha\mathcal{F}f\|_p = \|\mathcal{F}^{-1}\frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f\|_p \leq \|\mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f\|_p = \|f\|_{H^{s,p}}$. □

Auf Gebieten lassen sich analog zu den Sobolevräumen auch Besselpotenzialräume definieren.

Definition 3.9. *Für $s \geq 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definieren wir*

$$H^{s,p}(\Omega) = \{f|_\Omega : f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^d)\}.$$

KAPITEL 6

L^p-Theorie Elliptischer Randwertprobleme

Wir wollen im Folgenden elliptische Differentialoperatoren der Form

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{i}^{d} b_i(x)u(x) + c(x) \tag{35}$$

auf Gebieten in $\mathbb{R}^d$ betrachten. Ein Differentialoperator A heißt elliptisch, falls $a_{ij}(x) \in \mathbb{R}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und es eine Konstante $\delta > 0$ gibt, so dass

$$-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_j\xi_j \geq \delta|\xi|^2$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ gilt. In den Beweisen werden wir uns im Wesentlichen auf den technisch einfachsten Fall $(a_{ij}) = (\delta_{ij})$, also $A = \Delta$, beschränken. Wir werden für beschränkte Gebiete Ω ein Lokalisierungsargument anwenden. Daher behandeln wir zunächst den Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\Omega = \mathbb{R}^d_+ := \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0,\, x' \in \mathbb{R}^{d-1}\}$.

1. Lösungstheorie in $\mathbb{R}^d$

Wir assoziieren zu einem Differentialoperator A von der Form (35) einen stetigen Operator durch $D(A_p) = W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$, $A_p u := Au$. Der nächste Satz zeigt, dass die Wahl des Definitionsbereichs günstig ist, denn $A_p : W^{2,p}(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ ist Surjektiv.

SATZ 1.1. *Es sei A ein elliptischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten a_{ij} und $b_i = 0, c = 0$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit* Re $\lambda > 0$ *und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$ der Gleichung*

$$(\lambda - A)u = f \text{ in } \mathbb{R}^d. \tag{36}$$

Desweiteren gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq 2$.

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1-|\alpha|/2}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{37}$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis für den Fall $A = \Delta$. Anwenden der Fouriertransformation auf (36) liefert $(\lambda + |\xi|^2)\hat{u} = \hat{f}$ und somit ist $u =$

$\mathcal{F}^{-1}(\lambda+|\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ eine Lösung, falls $m_\lambda(\xi) := (\lambda+|\xi|^2)^{-1}$ ein Symbol der Ordnung 0 ist. Zunächst bemerken wir

$$|\lambda+\xi^2| = \sqrt{|\mathrm{Re}\,\lambda+\xi|^2+|\mathrm{Im}\,\lambda|^2} \geq \sqrt{|\mathrm{Re}\,\lambda|^2+|\mathrm{Im}\,\lambda|^2} = |\lambda|, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

und damit

$$\left|\frac{\xi^\alpha}{\lambda+\xi^2}\right| \leq \frac{\sqrt{|\lambda|}^{|\alpha|}}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{2}}}, \quad |\xi| \leq \sqrt{|\lambda|},$$
$$\left|\frac{\xi^\alpha}{\lambda+\xi^2}\right| \leq \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{|\xi|^2} = \frac{1}{|\xi|^{2-|\alpha|}} \leq \frac{1}{|\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{2}}}, \quad |\xi| \geq \sqrt{|\lambda|}.$$

Um zu zeigen, dass m_λ ein Symbol der Ordnung 0 ist, bemerken wir noch, dass sich $\xi^\beta D^\beta m_\lambda(\xi)$ als endliche Summe mit Summanden der Form

$$\xi^{\beta_1}(D^{\beta_1}|\xi|^2)m_\lambda \cdot \dots \cdot \xi^{\beta_n}(D^{\beta_n}|\xi|^2)m_\lambda$$

mit $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i$ schreiben lässt. (Induktion)
Damit folgt mit obigen Abschätzungen, dass m_λ, $\xi_i m_\lambda$ und $\xi_i\xi_j m_\lambda$ Symbole der Ordnung 0 sind. Nach Korollar 3.5 genügt T_{m_λ} damit den Abschätzungen

$$\|D^\alpha T_{m_\lambda}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{1}{|\lambda|^{1-|\alpha|/2}}.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung folgt mit der Injektivität der Fouriertransformation. $\square$

Für die Lokalisierung benötigen wir noch die Lösbarkeit, falls $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Es sei $A = \sum_{i,j=1}^d \alpha_{ij}\partial_{ij}$ ein elliptischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten α_{ij}. Wir definieren

$$Bu(x) = \sum_{i,j=1}^d (a_{ij}(x)-\alpha_{ij})\partial_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x)\partial u(x) + c(x)u(x).$$

Wir assoziieren hierzu wieder den Operator $B_p u = Bu$ mit $D(B_p) = W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

THEOREM 1.2. *Es seien A und B wie oben gegeben. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon, \lambda_0, C$, so dass für λ mit* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ *und $|\lambda| > \lambda_0$ die Gleichung*

$$(\lambda - A_p - B_p)u = f \text{ in } \mathbb{R}^d \tag{38}$$

für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$ besitzt, falls $\|a_{ij}-\alpha_{ij}\|_\infty \leq \varepsilon$ gilt. Desweiteren gilt für u die Abschätzung (37).

BEWEIS. Es ist klar, dass $(\lambda - A_p - B_p) : W^{2,p}(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ stetig ist. Wir zeigen, dass $(\lambda - A_p - B_p)^{-1} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ existiert und stetig ist. Dazu schreiben wir zunächst für $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^d)$

$$(\lambda - A_p - B_p)u = (Id - B_p(\lambda - A_p)^{-1})(\lambda - A_p)u.$$

Also existiert $(\lambda - A_p - B_p)^{-1} \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^d))$, falls $\|B_p(\lambda - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^d))} < 1$ gilt. In diesem Fall erhält man $(\lambda - A_p - B_p)^{-1} = (\lambda - A_p)^{-1}(Id - B_p(\lambda - A_p)^{-1})^{-1}$, wobei der zweite Operator wegen der Neumann Reihe existiert und stetig ist. Die geforderte Abschätzung $\|B_p(\lambda - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^d))} < 1$ folgt mit Hilfe von (37) für ε klein genug und λ groß genug, denn

$$\begin{aligned}
\|B_p(\lambda - A_p)^{-1}f\|_p \leq & \sum_{i,j=1}^{d} \|(a_{ij}(x) - \alpha_{ij})\partial_{ij}(\lambda - A_p)^{-1}f\|_p \\
& + \|\sum_{i=1}^{d} b_i\partial_i(\lambda - A_p)^{-1}f\|_p + \|c(\lambda - A_p)^{-1}f\|_p \\
\leq & \, d^2\varepsilon\|\partial_{ij}(\lambda - A_p)^{-1}f\|_p + d \max_{i=1,\dots,d} \|b_i\|_\infty \partial_i(\lambda - A_p)^{-1}f\|_p \\
& + \|c\|_\infty\|(\lambda - A_p)^{-1}f\|_p \\
\leq & \, C\varepsilon\|f\|_p + C\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\|f\|_p + C\frac{1}{|\lambda|}\|f\|_p.
\end{aligned}$$

Die Abschätzung (37) folgt schließlich mit (37) für A_p und der Darstellung $(\lambda - A_p - B_p)^{-1} = (\lambda - A_p)^{-1}(Id - B_p(\lambda - A_p)^{-1})^{-1}$. □

2. Lösungstheorie in $\mathbb{R}^d_+$

Da für $\Omega = \mathbb{R}^d_+$ der Rand $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\} \neq \emptyset$ gilt, müssen wir noch Bedingungen für u auf $\partial\Omega$ fordern, um die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $(\lambda - A)u = f$ zu sichern. Wir werden zwei verschiedene Randbedingungen untersuchen.

- Dirichlet-Randbedingung: $u|_{\partial\Omega} = 0$
- Neumann-Randbedingung: $\partial_n u|_{\partial\Omega} = 0$

Hierbei bezeichnet ∂_n die Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normalen an $\partial\Omega$.
Es sei nun zunächst A ein elliptischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Zur Lösung der Gleichung $(\lambda - A)u = f$ mit Dirichlet oder Neumann Randbedingungen wollen wir das zuvor gezeigte Ergebnis in $\mathbb{R}^d$ mit Hilfe von Reflexion an der Hyperebene $\{x_d = 0\}$ zeigen. Hierzu bemerken wir zunächst, dass $(\lambda - A)^{-1}$ durch einen Calderón-Zygmund-Kern K_λ gegeben ist, da das zugehörige Symbol $(\lambda - a(\xi))^{-1}$ ein Symbol der Ordnung 0 ist. Das heißt $(\lambda - A)^{-1}f = K_\lambda * f$ und diese Darstellung liefert unmittelbar, dass $u = (\lambda - A)^{-1}f \in C^\infty$ gilt, falls $f \in C^\infty$.
Es sei nun $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ Wir definieren

$$f_D(x', x_d) = \begin{cases} -f(x', -x_d) & \text{für} \quad x_d < 0, \\ f(x', x_d) & \text{für} \quad x_d > 0. \end{cases}$$

Damit ist f_D ungerade in der letzten Variable. Nun definieren wir $u_D \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ als Lösung von $(\lambda - A)u = f_D$ in $\mathbb{R}^d$. Damit ist u_D

ebenfalls ungerade, denn es gilt

$$\begin{aligned}(\lambda - A)(u_D(.,-.)|_{x=(x',x_d)} &= ((\lambda - A)u_D)(x', -x_d)\\ &= f_D(x', -x_d)\\ &= -f_D(x', x_d)\\ &= (\lambda - A)(-u_D)(x', x_d).\end{aligned}$$

Also löst sowohl $u_D(.,-.)$ als auch $-u_D$ die Gleichung $(\lambda - A)u = -f_D$. Die Funktionen $u_D(.,-.)$ und $-u_D$ müssen damit übereinstimmen. Da $u_D \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt folgt insbesondere $u_D(x', 0) = 0$ für alle $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Die Funktion u_D genügt daher der Dirichlet Randbedingung und $u_D|_{\mathbb{R}^d_+}$ löst

$$\begin{aligned}(\lambda - A)u &= f \qquad \text{in } \mathbb{R}^d_+\\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\mathbb{R}^d_+\end{aligned}$$

Insbesondere folgen die Normabschätzungen (37) da

$$\|D^\alpha u_D\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \le \|D^\alpha u_D\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \frac{C}{|\lambda|^{1-|\alpha|/2}}\|f_D\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \frac{C}{|\lambda|^{1-|\alpha|/2}} 2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)}.$$

Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d_+)$ liegt, lässt sich $(\lambda - A)^{-1}$ auf ganz $L^p(\mathbb{R}^d_+)$ eindeutig fortsetzen.
Für Neumann-Randbedingungen setzt man f gerade nach $\mathbb{R}^d$ fort und erhält analoge Abschätzungen. Außerdem erhält man durch exakt gleiche Argumentation des Beweises von Theorem 1.2 auch die Aussagen dieses Satzes für $\mathbb{R}^d_+$ statt $\mathbb{R}^d$ und wir haben das folgende Theorem entsprechend zu Theorem 1.2 gezeigt.

THEOREM 2.1. *Es seien A und B wie im letzten Abschnitt gegeben. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon, \lambda_0, C$, so dass für λ mit* Re $\lambda > 0$ *und* $|\lambda| > \lambda_0$ *die Gleichung*

$$\begin{aligned}(\lambda - A - B)u &= f \ \textit{in } \mathbb{R}^d_+\\ Ru &= 0 \ \textit{auf } \partial\mathbb{R}^d_+,\end{aligned} \tag{39}$$

wobei $R = Id$ (Dirichlet-RB) oder $R = \partial_n$ (Neumann-RB), für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}^d_+)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^d_+)$ besitzt, falls $\|a_{ij} - \alpha_{ij}\|_\infty \le \varepsilon$ gilt. Desweiteren gilt für u die Abschätzung

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \le \frac{C}{|\lambda|^{1-|\alpha|/2}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)}. \tag{40}$$

BEMERKUNG 2.2. *Mit Hilfe dieses Theorems lässt sich ein der Differentialgleichung $(\lambda - A)u = f$ zugeordneter Operator wie folgt definieren*

(a) *Für Dirichlet-Randbedingungen: $D(A_D) = W^{2,p}(\mathbb{R}^d_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^d_+)$ mit $A_D u = Au$.*
(b) *Für Neumann-Randbedingungen: $D(A_N) = \{u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^d_+) : \partial_d u \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^d_+)\}$*

3. Lösungstheorie in beschränkten Gebieten

Wir betrachten nun die Gleichung

$$(41)\qquad \begin{aligned}(\lambda - A)u &= f \text{ in } \Omega\\ Ru &= 0 \text{ auf } \partial\Omega\end{aligned}$$

wobei A wieder ein elliptischer Differentialoperator und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet von der Klasse C^2 ist. Das Hauptresultat für beschränkte Gebiete ist

THEOREM 3.1. *Es seien A und B wie im letzten Abschnitt gegeben. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon, \lambda_0, C$, so dass für λ mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$ und $|\lambda| > \lambda_0$ die Gleichung (41), wobei wie vorher $R = Id$ (Dirichlet-RB) oder $R = \partial_n$ (Neumann-RB), für jedes $f \in L^p(\Omega)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in W^{2,p}(\Omega)$ besitzt, falls $\|a_{ij} - \alpha_{ij}\|_\infty \leq \varepsilon$ gilt. Desweiteren erfüllt u die Abschätzung*

$$(42)\qquad \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1-|\alpha|/2}} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

BEMERKUNG 3.2. *Analog zum Fall $\Omega = \mathbb{R}^d_+$ können wir die folgenden Differentialoperatoren definieren*

(a) *Für Dirichlet-Randbedingungen: $D(A_D) = W^{2,p}(\mathbb{R}^d_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^d_+)$ mit $A_D u = Au$.*
(b) *Für Neumann-Randbedingungen: $D(A_N) = \{u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^d_+) : \nabla u|_{\partial\Omega} \cdot n = 0$ im Spursinne$\}$.*

Bevor wir das Theorem beweisen, wollen wir noch ein einfaches Korollar formulieren.

KOROLLAR 3.3. *Die Operatoren $(\lambda - A_D)^{-1}$, $(\lambda - A_N)^{-1} : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ sind kompakt, für alle λ für die sie existieren.*

BEWEIS. Ist $\operatorname{Re} \lambda > 0$ und $|\lambda| > \lambda_0$ so ist nach Obigem und nach dem Satz von Rellich $Id_w : W^{2,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ ein kompakter Operator und $(\lambda - A_D)^{-1}$ bzw. $(\lambda - A_N)^{-1}$ stetig von $L^p(\Omega)$ nach $W^{2,p}(\Omega)$. Also ist $(\lambda - A_D)^{-1} = Id_w(\lambda - A_D)^{-1} : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ kompakt. Für die übrigen λ für die die Resolvente existiert verwende die Resolventenidentität aus der Funktionalanalysis. □

BEWEIS. (von Theorem 3.1, Beweisskizze) Es sei $\{U_j, j = 1, \ldots, n\}$ eine endliche Überdeckung von $\partial\Omega$, wobei für die Mengen U_j $\operatorname{diam} U_j \leq \varepsilon$ gilt. Gemäß Definition 5.2 aus Kapitel 2 gibt es zugehörige Abbildungen $\phi_j : Q \to U_j$. Aus der stetigen Differenzierbarkeit der ϕ_j folgt, dass sich die Jakobi-Matrix nur um $\delta(\varepsilon)$ von Id unterscheidet und $\delta(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ gilt.
Weiter wählen wir aus der offenen Überdeckung $\{B(x, \varepsilon_x) : x \in \Omega \backslash \bigcup_j U_j, \varepsilon_x < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\}$ von $\overline{\Omega \setminus \bigcup_j U_j}$ endlich viele aus, etwa $\{O_j : j = n+1, \ldots, N\}$.

Wir definieren nun lokale Operatoren. Sei hierzu φ_j eine quadratische Zerlegung der Eins (d.h. $\sum_j \varphi_j^2 = 1$) zu $\{U_j\} \cup \{O_j\}$. Damit setzen wir:

(a) Fall $j \leq n$: Wir definieren u_j als Lösung von
$$(\lambda - A_j)u_j = \varphi_j f =: f_j \qquad \text{in } \mathbb{R}^d.$$

(b) Fall $n < j \leq N$: Wir definieren $u_j = \tilde{u}_j \circ \phi_j^{-1}$, wobei $\tilde{u}_j$ eine Lösung von
$$\begin{aligned}(\lambda - \tilde{A}_j)\tilde{u}_j &= (\varphi_j \circ \phi_j)(f \circ \phi_j) \qquad \text{in } \mathbb{R}^d_+\\ R\tilde{u}_j &= 0 \qquad \text{auf } \partial\mathbb{R}^d_+\end{aligned}$$

Hierbei müssen wir die Koeffizienten von $\tilde{A}_j$ so wählen, dass $A_j u_j = (\tilde{A}\tilde{u}_j) \circ \phi_j = f_j = \varphi_j f$ gilt. Das bedeutet (wir vernachlässigen hier den Index j)
$$\begin{aligned}Au &= A(\tilde{u} \circ \phi^{-1})\\ &= \sum_{i,l=1}^d a_{il}\partial_i\partial_l(\tilde{u} \circ \phi^{-1})\\ &= \sum_{i,l=1}^d a_{il}\partial_i \left(\sum_{k=1}^d \tilde{u} \cdot \partial_l(\phi^{-1})_k\right)\\ &= \sum_{i,l=1}^d a_{il} \left(\sum_{k,m=1}^d \partial_m\partial_k\tilde{u} \cdot \partial_i(\phi^{-1})_m \cdot \partial_l(\phi^{-1})_k + \partial_k\tilde{u} \cdot \partial_i\partial_l(\phi^{-1})_k\right)\\ &=: \tilde{A}\tilde{u}.\end{aligned}$$

Da für ε klein jede der Funktionen ϕ_j bis auf Rotation fast die identische Abbildung ist, ergibt sich, dass der Differentialoperator $\tilde{A}$ eine kleine Störung eines elliptischen Operators ist (da $\partial_i\phi_m^{-1} \sim \delta_{im}$). Klein meint hier im Sinne von Theorem 2.1. Daher ist $\tilde{u}_j$ wohldefiniert.

Damit definieren wir den ersten Kandidaten für die Lösung auf dem beschränkten Gebiet durch $v(f) := \sum_{j=1}^N \varphi_j u_j$, dann gilt
$$\begin{aligned}(\lambda - A)v = \lambda v - \sum_{j=1}^N \varphi_j A u_j + A(\varphi_j v) - \varphi_j A u_j\\ = \sum_{j=1}^N \lambda u_j - \varphi_j A u_j - [A, \varphi_j]u_j\\ = \sum_{j=1}^N \varphi_j f_j - B(\lambda - A_j)^{-1} f_j\\ =: f - T_\lambda f\end{aligned}$$

Aus der Produktregel folgt, dass der Operator $[A, \varphi_j]$ nur Ableitungen erster Ordnung in v und als Koeffizienten erste und zweite Ableitungen von φ enthält. Daher ist der Operator $T_\lambda : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ stetig mit der Abschätzung

$$\|T_\lambda f\|_p \leq \frac{C}{\sqrt{|\lambda|}} \|f\|_p.$$

Für λ groß genug existiert also $(Id - T_\lambda)^{-1}$ und wir erhalten schließlich eine Lösung der Gleichung durch $u = v((Id - T_\lambda)^{-1} f)$. Die Normabschätzungen für u folgen aus der Beschränktheit von $(Id - T_\lambda)^{-1}$ und der Konstruktion von v. $\square$

4. Ausblick: Eine weitere Anwendung der Fouriertransformation

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{43}$$

mit einer Anfangstemperaturverteilung $u_0 \in \mathcal{S}$. Wir suchen also eine Funktion $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, die diese Gleichung im Distributionensinne erfüllt. Anwenden der Fouriertransformation ergibt

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} &= 0 \qquad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ \hat{u}(0,\xi) &= \hat{u}_0(\xi) \qquad \text{in } \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Also ist für festes $\xi \in \mathbb{R}^d$ die Lösung $\hat{u}(t,\xi)$ gegeben durch die Lösung dieser gewöhnlichen DGl., nämlich

$$\hat{u}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi).$$

Anwenden von $\mathcal{F}^{-1}$ und Beispiel 2.4 aus Kapitel 4 liefert, da $\mathcal{F}^{-1} f(x) = \mathcal{F} f(-x)$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0\right) \\ &= \left(\mathcal{F}^{-1} \mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\right) * u_0 \\ &= \left(\mathcal{F} \mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\right) * u_0 \\ &= \left(\frac{1}{2t}\right)^{d/2} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}} * u_0 \\ &=: G_t * u_0. \end{aligned}$$

Die Funktion G_t wird auch Gauss-Kern genannt. Es gilt $\|G_t\|_1 = 1$ und daher folgt mit der Ungleichung von Young für die Faltung, dass der durch $u(t) = G_t * u_0$ definierte Operator stetig auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ für alle $t > 0$ ist. Desweiteren ist G_t analytisch in dem Parameter t. Da auch $\partial_t^k G_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für $k \in \mathbb{N}$, folgt, dass damit $u(t,x) = G_t * u_0(x)$ sogar analytisch in t für $t > 0$ ist.

KAPITEL 7

Evolutionsgleichungen – Das abstrakte Cauchy-Problem

Im verbleibenden Teil der Vorlesung wollen wir uns mit linearen, parabolischen Evolutionsgleichungen beschäftigen, d.h. mit lineare partiellen Differentialgleichungen, die eine Zeit- und Ortsvariablen enthalten, in denen ein Mal nach der Zeit differenziert wird und die Ortsableitungen durch einen elliptischen Differentialoperator beschrieben werden können. Die Modellgleichung in diesem Zusammenhang ist die *Wärmeleitungsgleichung*, die in ihrer einfachsten Form so aussieht:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \Delta u(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

mit einer gegebenen Anfangsbedingung u_0.
Unser Ansatz zur Lösung solcher Gleichungen besteht darin, die Gleichung als gewöhnliche Differentialgleichung in einem Banachraum aufzufassen. Bezeichnet in obigem Beispiel Δ_2 den Laplace-Operator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, so können wir obige Gleichung umschreiben zu

$$\begin{aligned} u'(t) &= \Delta_2 u(t), \quad t>0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen nun im Sinne von „gleich in L^2“ zu verstehen ist. Wir haben nun ein leichteres Problem, nämlich eine gewöhnliche Differentialgleichung, in einem komplizierteren Gebilde, nämlich dem Banachraum L^2, zu betrachten. Ein solches Problem in der abstrakten Form

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), \quad t>0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wobei A ein linearer Operator in einem Banachraum X und $u:[0,\infty)\to X$ ist, nennt man *abstraktes Cauchy-Problem*.
Rein formal handelt es sich nun um eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren Lösung naiv aus der Sicht der Analysis III betrachtet $u=\mathrm{e}^{tA}u_0$ sein sollte, auch wenn im Moment natürlich $\mathrm{e}^{t\Delta_2}$ keinen Sinn ergibt. So naiv der Ansatz auch scheint, er trägt sehr, sehr weit...

1. Stark-stetige Operatorhalbgruppen

Wir nähern uns behutsam einer Antwort auf die Frage was e^{tA} für einen unbeschränkten Operator A auf einem Banachraum X sein soll. In den folgenden Abschnitten entwickeln wir diese Theorie im abstrakten Rahmen. Dabei müssen wir häufig Funktionen $u : [a, b] \to X$ integrieren, wozu wir eine Vorbemerkung machen.

1.1. Das Vektor-wertige Riemann-Integral. Sei X ein Banachraum, $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C([a, b]; X)$. Ist $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit Feinheitsmaß $|\pi| = \max_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})$, sowie $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, Zwischenstellen, so konvergieren die Riemann-Summen

$$\sum_{j=1}^n f(\tau_j)(t_j - t_{j-1})$$

für $|\pi| \to 0$ gegen das *X-wertige Riemann-Integral*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Das funktioniert genauso wie in der Analysis I, wobei man natürlich alle Beträge im Bildbereich durch die Norm in X ersetzen muss. Ebenfalls wie in Analysis I definieren wir uneigentliche Integrale wie

$$\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

falls dieser Grenzert existiert und verwenden munter andere Eigenschaften des Integrals wie Linearität, die Dreiecksungleichung, partielle Integration und den Hauptsatz.

Neu hinzu kommen die folgenden Eigenschaften.

Lemma 1.2. *Sei X ein Banachraum und $u \in C([a, b]; X)$. Dann gilt*

(a) $B \in \mathcal{L}(X) \Longrightarrow B \displaystyle\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Bu(t)\,\mathrm{d}t.$

(b) Ist $A : X \supseteq D(A) \to X$ abgeschlossen und $u \in C([a, b]; D(A))$ (d.h. $u \in C([a, b]; X)$, $Au(t) \in D(A)$ für alle $t \in [a, b]$ und $Au \in C([a, b]; X)$), so ist $\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \in D(A)$ und es gilt $A \displaystyle\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Au(t)\,\mathrm{d}t.$

BEWEIS. Übung. □

DEFINITION 1.3. *Sei X ein Banachraum, $-\infty < a < b < \infty$ und $T : [a, b] \to \mathcal{L}(X)$. Dann heißt*

(a) T normstetig $\iff$ T stetig, d.h. $\|T(t) - T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0$ $(t \to t_0)$.
(b) T stark-stetig $\iff$ $\|T(t)x - T(t_0)x\|_X \to 0$ $(t \to t_0)$ für alle $x \in X$.

BEMERKUNG 1.4. *(a) T normstetig $\Longrightarrow$ T stark-stetig.*
(b) Ist T stark-stetig, so definieren wir

$$\int_a^b T(s)\,\mathrm{d}s \in \mathcal{L}(X) \quad \textit{mit} \quad \Big(\int_a^b T(s)\,\mathrm{d}s\Big)x := \int_a^b T(s)x\,\mathrm{d}s.$$

DEFINITION 1.5 (Laplace-Transformation).

(a) Eine Funktion $u \in C([0, \infty); X)$ heißt exponentiell beschränkt*, falls Konstanten $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existieren mit $\|u(t)\|_X \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$.*
(b) Ist u exponentiell beschränkt, so existiert für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(\lambda) > \omega$ *das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)\,\mathrm{d}t$ und die Funktion*

$$\hat{u} : \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(\lambda) > \omega\} \to X \quad \textit{mit} \quad \hat{u}(\lambda) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)\,\mathrm{d}t$$

heißt Laplace-Transformierte *von u.*

Die folgende fundamentale Eigenschaft der Laplace-Transformation wollen wir hier nur zitieren.

SATZ 1.6 (Eindeutigkeit der Laplace-Transformation). *Sei $u \in C([0, \infty); X)$ und $t \mapsto \int_0^t u(s)\ \mathrm{d}s$, $t > 0$, exponentiell beschränkt mit Konstanten M und ω. Existiert dann ein $\omega' > \omega$, so dass $\hat{u}(\lambda) = 0$ für alle $\lambda > \omega'$ gilt, so ist $u \equiv 0$.*

Was hat das alles nun mit unserem abstrakten Cauchy-Problem zu tun? Wir formulieren dieses zunächst einmal exakt:

1.7. Abstraktes Cauchy-Problem (ACP). Sei X ein Banachraum und $(A, D(A))$ ein abgeschlossener, linearer Operator in X. Zu gegebenem $u_0 \in X$ finde ein $u \in C^1((0, \infty); X) \cap C([0, \infty); X) \cap C((0, \infty); D(A))$ mit

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$

Sei nun u eine exponentiell beschränkte Lösung von (ACP). Dann gilt dank Lemma 1.2 (b) für die Laplace-Transformierte $\hat{u} \in D(A)$ und

$$\begin{aligned} A\hat{u}(\lambda) &= A\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}Au(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)\,\mathrm{d}t = -u_0 + \lambda\hat{u}(\lambda) \end{aligned}$$

für alle $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, wobei ω die Konstante aus der exponentiellen Beschränkheit von u ist.
Damit gilt $(\lambda - A)\hat{u}(\lambda) = u_0$, d.h. im Falle, dass $\lambda \in \varrho(A)$ gilt, haben wir

$$\hat{u}(\lambda) = R(\lambda, A)u_0.$$

Ist die Resolventenmenge von A also „ausreichend groß“, so können wir hoffen, dass wir Lösungen von (ACP) bekommen, wenn wir die Resolvente von A in irgendeiner Weise Laplace-rücktransformieren können. Das ist unser nächstes Ziel.

Notation 1.8. *Es sei $T : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ stark-stetig und exponentiell beschränkt mit Konstanten M und ω. Dann definieren wir $\hat{T}(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ für $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$ durch*

$$\hat{T}(\lambda)x := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t = (\widehat{T(\cdot)x})(\lambda), \quad x \in X.$$

Definition 1.9. *Sei $\omega \in \mathbb{R}$. Eine Familie $\{R(\lambda) : \lambda > \omega\} \subseteq \mathcal{L}(X)$ heißt* Pseudoresolvente, *falls für alle $\lambda, \mu > \omega$ die Resolventengleichung*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\mu)R(\lambda)$$

gilt.

Satz 1.10. *Es sei $\{R(\lambda) : \lambda > \omega\}$ eine Pseudoresolvente. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) Es existiert ein abgeschlossener linearer Operator A in X mit $(\omega,\infty) \subseteq \varrho(A)$ und $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ für alle $\lambda > \omega$.
(b) $R(\lambda)$ ist injektiv für ein $\lambda > \omega$.
(c) $R(\lambda)$ ist injektiv für alle $\lambda > \omega$.

Beweis. Ist $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ für alle $\lambda > \omega$, so ist $R(\lambda)$ natürlich für all diese λ auch injektiv. Somit folgt (c) sofort aus (a), genauso wie (b) direkt aus (c) folgt. Wir beweisen also „(b) $\Rightarrow$ (a)“.
Es sei $\lambda_0 > \omega$ und $R(\lambda_0)$ injektiv. Für alle $x \in R(\lambda_0)(X)$ setzen wir dann $A := \lambda_0 - R(\lambda_0)^{-1}$, was dank der Injektivität von $R(\lambda_0)$ möglich ist. Dann ist A offensichtlich linear mit $D(A) = R(\lambda_0)(X)$. Außerdem gilt dann $(\lambda_0 - A)R(\lambda_0) = \mathrm{id}_X$ und $R(\lambda_0)(\lambda_0 - A) = \mathrm{id}_{D(A)}$.

Sei nun $\lambda > \omega$ beliebig. Dann gilt mit zweimaliger Anwendung der Resolventengleichung

$$\begin{aligned}(\lambda - A)R(\lambda) &= (\lambda - A)\big[R(\lambda_0) + R(\lambda) - R(\lambda_0)\big] \\ &= (\lambda - A)\big[R(\lambda_0) + (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)R(\lambda)\big] \\ &= \big[(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)\big]R(\lambda_0)\big[I + (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda)\big] \\ &= (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0)\big[I + (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda)\big] + I + (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda) \\ &= I + (\lambda_0 - \lambda)\big[R(\lambda) - R(\lambda_0) - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0)R(\lambda)\big] = I.\end{aligned}$$

Genauso zeigt man $R(\lambda)(\lambda - A) = I$ auf $D(A)$. Schließlich ist damit $\varrho(A) \neq \emptyset$ und damit A in jedem Fall abgeschlossen. □

Mit diesem Kriterium, wann eine Pseudoresolvente tatsächlich Resolvente eines Operators ist, können wir nun zeigen, welche Operatorenfamilien die Urbilder der Resolventen unter der Laplace-Transformation sind.

Theorem 1.11. *Sei $T : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ stark-stetig und exponentiell beschränkt mit Konstanten M und ω. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- *(a) Es existiert ein abgeschlossener linearer Operator $(A, D(A))$ mit $(\omega,\infty) \subseteq \varrho(A)$ und $\hat{T}(\lambda) = R(\lambda, A)$ für alle $\lambda > \omega$.*
- *(b) $T(0) = I$ und $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $s,t \geq 0$.*

Damit sind die Abbildungen $T : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$, die im obigen Theorem die Bedingung (b) erfüllen, die Kandidaten für die Laplace-Rücktransformation der Resolvente. In der Einführung zu diesem Kapitel hatten wir gesehen, dass diese Lösungen unserer abstrakten Cauchyprobleme moralisch von der Form $\mathrm{e}^{tA}u_0$ sein müssten. Tatsächlich finden wir nun Abbildungen, die die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^0 = 1$ und $\mathrm{e}^{t+s} = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^s$ erfüllen. Wir geben diesen Abbildungen T zunächst ihren Namen.

Definition 1.12. *Eine Abbildung $T : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ heißt C_0-*Halbgruppe*, falls*

- *T stark-stetig,*
- *$T(0) = I$*
- *$T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $s,t \geq 0$ (Halbgruppen-Eigenschaft).*

Beweis von Theorem 1.11. Es sei $\mu > \lambda > \omega$. Dann gilt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}\frac{\hat{T}(\lambda)x - \hat{T}(\mu)x}{\mu - \lambda} &= \frac{1}{\lambda - \mu}\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\Big|_0^\infty \hat{T}(\lambda)x - \frac{1}{\mu - \lambda}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t}T(t)x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\hat{T}(\lambda)x\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\mu - \lambda}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Integrieren wir nun im zweiten Integral partiell, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda r} T(r)x \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t - \frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda r} T(r)x \,\mathrm{d}r \,\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \Big|_{t=0}^\infty \\
&\quad + \frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^\infty (\lambda-\mu)\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda r} T(r)x \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda r} T(r)x \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda r} T(r)x \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \int_t^\infty \mathrm{e}^{-\lambda r} T(r)x \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Mit der Substitution $r = s + t$ liefert das

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{T}(\lambda)x - \hat{T}(\mu)x}{\mu-\lambda} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)} T(t+s)x \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(t+s)x \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt natürlich nach der Definition der Laplace-Transfomierten $\hat{T}$ für jedes $x \in X$

$$
\hat{T}(\mu)\hat{T}(\lambda)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(t)T(s)x \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t.
$$

„(a) $\Rightarrow$ (b)“ Gilt $\hat{T}(\lambda) = R(\lambda, A)$ für alle $\lambda > \omega$, so gilt dank der Resolventengleichung $(\mu - \lambda)\hat{T}(\mu)\hat{T}(\lambda) = \hat{T}(\lambda) - \hat{T}(\mu)$ für alle $\lambda, \mu > \omega$. Also ist mit obiger Rechung

$$
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(t+s)x \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu t} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(t+s)x \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t
$$

und der Eindeutigkeitssatz 1.6 für die Laplace-Transformierte liefert $T(t + s) = T(t)T(s)$ für alle $s, t \geq 0$.

Wegen $T(0) = T(0+0) = T(0)T(0)$ ist dann $T(0)$ eine Projektion. Wir zeigen nun, dass $T(0)$ injektiv ist, denn dann muss $T(0) = I$ gelten. Sei also $x \in X$ mit $T(0)x = 0$ gegeben. Dann gilt für alle $t > 0$

$$
T(t)x = T(t+0)x = T(t)T(0)x = T(t)0 = 0,
$$

also ist für ein beliebiges $\lambda > \omega$

$$R(\lambda, A)x = \hat{T}(\lambda)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x \, \mathrm{d}t = 0$$

und da die Resolvente injektiv ist, haben wir $x = 0$.

„(a) $\Leftarrow$ (b)" Aus obiger Rechnung folgt mit der Voraussetzung $T(t+s) = T(t)T(s)$ nun $(\mu - \lambda)\hat{T}(\mu)\hat{T}(\lambda) = \hat{T}(\lambda) - \hat{T}(\mu)$, d.h. $\{\hat{T}(\lambda) : \lambda > \omega\}$ ist eine Pseudoresolvente. Es bleibt wegen Satz 1.10 noch zu zeigen, dass $\hat{T}(\lambda)$ für ein $\lambda > \omega$ injektiv ist. Sei also $\lambda > \omega$ und $x \in X$ mit $\hat{T}(\lambda)x = 0$ gegeben. Dann gilt mit der Resolventengleichung für jedes $\mu > \omega$

$$\hat{T}(\mu)x = \hat{T}(\lambda)x - (\mu - \lambda)\hat{T}(\mu)\hat{T}(\lambda)x = 0.$$

Also ist wieder mit Satz 1.6 $T(t)x = 0$ für alle $t \geq 0$. Insbesondere gilt also $x = T(0)x = 0$. $\square$

Wir haben in der Definition einer C_0-Halbgruppe nicht vorausgesetzt, dass T exponentiell beschränkt ist. Tatsächlich folgt das schon aus obiger Definition.

Satz 1.13. *Ist T eine C_0-Halbgruppe auf X, so gibt es Konstanten $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$.*

Beweis. Sei $x \in X$. Dann ist die Abbildung $\xi_x : [0,1] \to X$ mit $\xi_x(t) := T(t)x$ stetig, d.h. die Menge $\{T(t)x : t \in [0,1]\} \subseteq X$ ist kompakt und damit beschränkt für jedes $x \in X$. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit ist damit auch $\{T(t) : t \in [0,1]\}$ in $\mathcal{L}(X)$ beschränkt. Also ist $M := \sup_{t\in[0,1]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$.
Sei nun $t \geq 0$ und $t = n + s$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in [0,1)$. Dann gilt für $\omega = \log(M)$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(s)T(n)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(s)T(1)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq MM^n = M\mathrm{e}^{\omega n} \leq M\mathrm{e}^{\omega t}.$$

$\square$

Die Halbgruppeneigenschaft $T(t + s) = T(t)T(s)$, die hier die exponentielle Beschränktheit gratis mitliefert, hat noch weitere angenehme Folgen. Als Beispiel geben wir den folgenden Satz an.

Satz 1.14. *Gelten für $T : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X)$ die Beziehungen $T(0) = I$ und $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $t, s \geq 0$, so ist T genau dann stark-stetig, wenn dies in Null gilt, d.h. wenn $\lim_{t\searrow 0} T(t)x = x$ für alle $x \in X$ gilt.*

Definition 1.15. *Sei T eine C_0-Halbgruppe auf X. Der nach Satz 1.10 existierende abgeschlossene lineare Operator $(A, D(A))$ heißt* Erzeuger *oder* Generator *von T.*

Wir sammeln einige wichtige Beziehungen zwischen Halbgruppe und Generator.

SATZ 1.16 (Allerweltsformel). *Sei T eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Generator $(A, D(A))$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(a) $T(t)R(\mu, A) = R(\mu, A)T(t)$ *für alle* $t \geq 0$ *und alle* $\mu \in \varrho(A)$.

(b) Ist $x \in D(A)$, *so gilt* $T(t)x \in D(A)$ *und* $AT(t)x = T(t)Ax$ *für alle* $t \geq 0$.

(c) Es ist $x \in D(A)$ *und* $Ax = y$ *genau dann, wenn* $\int_0^t T(s)y \, \mathrm{d}s = T(t)x - x$ *gilt.*

(d) Für jedes $x \in X$ *und jedes* $t > 0$ *gilt* $\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s \in D(A)$ *und* $A \int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s = T(t)x - x$.

(e) A *ist dicht definiert, d.h.* $\overline{D(A)} = X$.

(f) Es ist genau dann $x \in D(A)$, *wenn der Grenzwert* $y := \lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{T(t)x - x}{t}$ *existiert. In diesem Fall gilt* $Ax = y$.

BEWEIS. **Zu (a):** Sei $x \in X$ und $\lambda \geq \omega$, wobei ω die Konstante aus der exponentiellen Beschränktheit von T ist (vgl. Satz 1.13). Dann gilt

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)R(\mu, A)x \, \mathrm{d}t = R(\lambda, A)R(\mu, A)x = R(\mu, A)R(\lambda, A)x$$

$$= R(\mu, A) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} R(\mu, A)T(t)x \, \mathrm{d}t$$

und mit Satz 1.6 folgt die Behauptung.

Zu (b): Sei $x \in D(A)$ und $\lambda > \omega$. Dann ist mit Hilfe von (a)

$$T(t)x = T(t)R(\lambda, A)(\lambda - A)x = R(\lambda, A)T(t)(\lambda - A)x \in D(A)$$

und wir erhalten durch Anwendung von $\lambda - A$ auf diese Gleichung

$$(\lambda - A)T(t)x = T(t)\lambda x - T(t)Ax,$$

d.h. $AT(t)x = T(t)Ax$.

Zu (c): Für alle $y \in X$ und alle $\lambda > \max\{0, \omega\}$ gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)y &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)y \, \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t T(s)y \, \mathrm{d}s \Big|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t T(s)y \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist nun Null, da

$$\begin{aligned} \left\| \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t T(s)y \, \mathrm{d}s \right\|_X &\leq M\mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t \mathrm{e}^{\omega s} \, \mathrm{d}s \|y\|_X \\ &= \frac{M}{\omega} \mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathrm{e}^{\omega t} - 1)\|y\|_X \leq \frac{M}{\omega} \mathrm{e}^{-(\lambda - \omega)t} \|y\|_X \to 0 \end{aligned}$$

für $t \to \infty$ gilt.
Damit ist

$$R(\lambda, A)y = \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t T(s)y \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t.$$

Andererseits gilt für jedes $x \in X$

$$\lambda R(\lambda, A)x - x = \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x \,\mathrm{d}t - \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \,\mathrm{d}t\, x = \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(T(t)x - x) \,\mathrm{d}t.$$

Mit Hilfe dieser Betrachtungen beweisen wir nun zunächst „$\Rightarrow$". Ist $x \in D(A)$ und $y = Ax$, so gilt

$$R(\lambda, A)y = R(\lambda, A)Ax = -R(\lambda, A)(\lambda - A)x + \lambda R(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)x - x.$$

Also gilt

$$\lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(T(t)x - x) \,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t T(s)y \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t$$

und Satz 1.6 liefert wieder die Behauptung.
Zum Beweis von „$\Leftarrow$" beobachten wir, dass aus der Voraussetzung und obigen Betrachtungen $\lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)y$ folgt. Damit ist $x = R(\lambda, A)(\lambda x - y) \in D(A)$ und es gilt $\lambda x - Ax = \lambda x - y$, also $Ax = y$.
Zu (d): Sei $x \in X$ und $\lambda > \max\{0, \omega\}$. Setzen wir $y = R(\lambda, A)x$, so ist $y \in D(A)$ und es gilt mit (c)

$$\int_0^t T(s)x \,\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)\lambda y \,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)Ay \,\mathrm{d}s = \lambda \int_0^t T(s)y \,\mathrm{d}s - T(t)y + y.$$

Nun ist $T(\cdot)y \in C((0, \infty); D(A))$, also gilt nach Satz 1.2 (b) und der Aussage in (b), dass $\int_0^t T(s)x \,\mathrm{d}s \in D(A)$ ist und

$$\begin{aligned} A \int_0^t T(s)x \,\mathrm{d}s &= \lambda \int_0^t T(s)Ay \,\mathrm{d}s - T(t)Ay + Ay \overset{\text{(c)}}{=} \lambda(T(t)y - y) - T(t)Ay + Ay \\ &= T(t)(\lambda - A)y - (\lambda - A)y = T(t)x - x \end{aligned}$$

gilt.
Zu (e): Sei $x \in X$. Nach (d) gilt $x_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T(s)x \,\mathrm{d}s \in D(A)$ für jedes $\varepsilon > 0$ und dank der Stetigkeit von $s \mapsto T(s)x$ in X ist $\lim_{\varepsilon \searrow 0} x_\varepsilon = T(0)x = x$.
Zu (f): Zum Beweis von „$\Rightarrow$" sei $x \in D(A)$. Dann gilt mit (c)

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax \,\mathrm{d}s \to Ax \quad (t \searrow 0).$$

Es bleibt also „$\Leftarrow$“ zu beweisen. Sei dazu $x \in X$ gegeben, so dass der Grenzwert $y := \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$ in X existiert. Wir setzen

$$x_n := n \int_0^{1/n} T(s)x \,\mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $x_n \in D(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ dank (d) und wie in (e) sieht man $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in X. Weiter gilt mit (d) und nach Voraussetzung

$$Ax_n = nA \int_0^{1/n} T(s)x \,\mathrm{d}s = n\big(T(1/n)x - x\big) \to y \quad (n \to \infty).$$

Die Abgeschlossenheit von A liefert nun sofort $x \in D(A)$ und $Ax = y$, also die Behauptung. $\square$

Führen wir die gedankliche Analogie zur Exponentialfunktion fort und setzen im Geiste $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$, so sind eigentlich alle Formeln im obigen Satz ganz natürlich. Als Beispiel schreiben wir uns (c) um:

$$\int_0^t T(s)y \,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{e}^{sA}Ax \,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{sA}x\Big|_0^t = \mathrm{e}^{tA}x - x = T(t)x - x.$$

Man wiederhole selbiges zur Übung mit (f)!
Ist also A der Generator einer C_0-Halbgruppe T, so kann man mit einiger Berechtigung statt $T(t)$ auch e^{tA} schreiben (was auch oft gemacht wird).
Zum Abschluss wollen wir natürlich noch zeigen, dass unsere Halbgruppen wirklich eine Lösung des abstrakten Cauchy-Problems (ACP) liefern.

Theorem 1.17. *Ist A der Generator einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X und $u_0 \in D(A)$, so ist $u(t) := T(t)u_0$, $t \geq 0$, die eindeutige Lösung von (ACP).*

Beweis. Da T stark-stetig ist, gilt zunächst $u \in C([0,\infty); X)$. Weiter ist mit $u_0 \in D(A)$ nach Satz 1.16 (b) auch $u(t) \in D(A)$ für alle $t \geq 0$ und $Au(t) = T(t)Au_0 \in C([0,\infty); X)$, d.h. wir haben sogar $u \in C([0,\infty); D(A))$. Außerdem gilt mit (c)

$$u(t) = T(t)u_0 = u_0 + \int_0^t T(s)Au_0 \,\mathrm{d}s,$$

was eine nach dem Hauptsatz auf $(0,\infty)$ stetig nach t differenzierbare Funktion ist. Damit ist auch $u \in C^1((0,\infty); X)$ und wir haben

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t T(s)Au_0 \,\mathrm{d}s = T(t)Au_0 = AT(t)u_0$$

mit Hilfe von (b). Da schließlich auch $u(0) = T(0)u_0 = u_0$ gilt, ist also u eine Lösung von (ACP).
Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei dazu u irgendeine Lösung von (ACP), die den Regularitätsanforderungen aus 1.7 genügt. Für ein beliebig vorgegebenes $\tau > 0$ setzen wir nun

$$w(t) := T(\tau - t)u(t), \quad t \in [0, \tau].$$

Dann gilt mit der gleichen Begründung wie oben und Satz 1.16 (b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w(t) = -AT(\tau - t)u(t) + T(\tau - t)u'(t) = T(\tau - t)\big(u'(t) - Au(t)\big) = 0,$$

da u eine Lösung von (ACP) ist. Das bedeutet aber, dass w auf $[0, \tau]$ konstant ist, d.h. wir haben

$$u(\tau) = w(\tau) = w(0) = T(\tau)u_0 \quad \text{für alle } \tau > 0$$

und sind fertig. □

Natürlich ist dieses Ergebnis bis jetzt nur von eingeschränktem Nutzen, solange wir nicht wissen, welche Operatoren denn überhaupt Erzeuger von C_0-Halbgruppen sind. Ja, es könnte sogar sein, dass es außer beschränkten Operatoren, für die man mit Hilfe der Exponentialreihe sogar eine normstetige Halbgruppe erhält, gar keine Erzeuger gibt. Wir werden daher in den nächsten Abschnitten Kriterien beweisen, wann ein (unbeschränkter) Operator ein Erzeuger ist.

2. Der Satz von Hille-Yosida

Wenden wir uns also der Frage zu, für welche unbeschränkten Operatoren A wir eine C_0-Halbgruppe $T(= (\mathrm{e}^{tA})_{t \geq 0})$ finden können. Der Ansatz diese über die Exponentialreihe zu definieren, fällt aus Konvergenzgründen ebenso flach wie die Verwendung von $\mathrm{e}^{tA} = \lim_{n\to\infty}(1 + tA/n)^n$. Um diese Problematik zu umgehen, werden wir A durch geeignete beschränkte Operatoren A_n, $n \in \mathbb{N}$, approximieren und dann e^{tA} durch Approximation mittels e^{tA_n} erhalten. Das liefert die folgende Charakterisierung, die das Hauptresultat dieses Abschnitts ist.

Theorem 2.1 (Hille, Yosida, 1948). *Es sei $(A, D(A))$ ein linearer Operator in einem Banachraum X mit $\overline{D(A)} = X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) A erzeugt eine C_0-Halbgruppe T von Kontraktionen auf X, d.h. $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ für alle $t \geq 0$.
(b) $(0, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/\lambda$ für alle $\lambda > 0$.
(c) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) > 0\} \subseteq \varrho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/\mathrm{Re}(\lambda)$ für alle diese λ.

Zum Beweis dieses Theorems benötigen wir noch einige Vorarbeiten. Wir beginnen mit einer in vielen Zusammenhängen nützlichen Methode, dem sogenanneten Rescaling.

Lemma 2.2 (Rescaling). *Sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann erzeugt der Operator $B := \lambda + A$ mit $D(B) = D(A)$ die C_0-Halbgruppe $S(t) := \mathrm{e}^{\lambda t} T(t)$, $t \geq 0$.*

Beweis. Übung □

Wir verwenden dieses beispielhaft um folgenden Satz zu zeigen.

Satz 2.3. *Es sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X. Existiert für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ das Integral $I_\lambda := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x \,\mathrm{d}t$ für alle $x \in X$, so ist $\lambda \in \varrho(A)$ und $R(\lambda, A)x = I_\lambda$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Wir beweisen zunächst den Spezialfall $\lambda = 0$. Dann gilt nach Satz 1.16 (f)

$$
\begin{aligned}
A \int_0^\infty T(s)x \,\mathrm{d}s &= \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^\infty T(s+h)x \,\mathrm{d}s - \int_0^\infty T(s)x \,\mathrm{d}s \right) \\
&= \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_h^\infty T(s)x \,\mathrm{d}s - \int_0^\infty T(s)x \,\mathrm{d}s \right) = - \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \,\mathrm{d}s \\
&= -x.
\end{aligned}
$$

Mit der Abgeschlossenheit von A (vgl. Theorem 1.11), Satz 1.2 und Satz 1.16 (b) gilt für $x \in D(A)$ auch

$$
-x = A \int_0^\infty T(s)x \,\mathrm{d}s = \int_0^\infty T(s)Ax \,\mathrm{d}s.
$$

Also ist $0 \in \varrho(A)$ und $R(0, A)x = I_0$.
Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig und $B := A - \lambda$ mit $D(B) = D(A)$. Dann erzeugt B nach Lemma 2.2 die C_0-Halbgruppe $S(t) := \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)$, $t \geq 0$. Die Voraussetzung besagt dann, dass $\int_0^\infty S(s)x \,\mathrm{d}s$ für alle $x \in X$ existiert. Also gilt nach obigen Betrachtungen $0 \in \varrho(B)$ und $(-B)^{-1}x = \int_0^\infty S(s)x \,\mathrm{d}s$. Das bedeutet aber gerade, dass $\lambda \in \varrho(A)$ mit $R(\lambda, A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) \,\mathrm{d}s$ gilt. □

Beweis von (a) ⇒ (c) in Theorem 2.1. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Dann existiert dank $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ für alle $t \geq 0$ das Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) \mathrm{d}t$ und somit ist $\lambda \in \varrho(A)$ nach Satz 2.3. Außerdem gilt

$$
\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t) \,\mathrm{d}t \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\lambda) t} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}.
$$

□

Somit bleibt uns in Theorem 2.1 „nur“ noch die Implikation „(b)⇒(a)“ zu zeigen. Dazu betrachten wir die sogenannten *Yosida-Approximanten* von A, d.h. die Operatoren

$$
A_n := nAR(n, A) = n^2 R(n, A) - nI
$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese sind offensichtlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf X beschränkte Operatoren. Außerdem gilt noch folgendes.

LEMMA 2.4. *A erfülle die Voraussetzungen von Thereom 2.1 (b) und A_n, $n \in \mathbb{N}$, seien die Yosida-Approximanten von A. Dann gilt*

(a) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ erzeugt A_n eine normstetige Halbgruppe $T_n(t) = \mathrm{e}^{tA_n}$, $t \geq 0$, auf X mit $\|T_n(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ für alle $t \geq 0$.*

(b) *Für alle $x \in X$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\|T_n(t)x - T_m(t)x\|_X \leq t\|A_n x - A_m x\|_X.$$

(c) *Für jedes $x \in D(A)$ gilt $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$.*

BEWEIS. **Zu (a):** Da $A_n \in \mathcal{L}(X)$ gilt, ist A_n Erzeuger einer normstetigen Halbgruppe (vgl. Übung). Deren Kontraktivität ergibt sich mit der Voraussetzung aus Theorem 2.1 (b) durch

$$\begin{aligned}\|T_n(t)x\|_X = \|\mathrm{e}^{tA_n}\| &= \|\mathrm{e}^{t(n^2R(n,A)-n)}x\|_X = \mathrm{e}^{-tn}\|\mathrm{e}^{tn^2R(n,A)}x\|_X \\ &\leq \mathrm{e}^{-tn}\mathrm{e}^{tn^2\|R(n,A)\|}\|x\|_X = \mathrm{e}^{-tn}\mathrm{e}^{tn}\|x\|_X = \|x\|_X.\end{aligned}$$

Zu (b): Da die Resolventen von A mit verschiedenen λ untereinander kommutieren, kommutieren auch A_n, A_m, e^{tA_n} und e^{tA_m}. Damit erhalten wir für alle $x \in X$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{tA_n}x - \mathrm{e}^{tA_m}x\|_X &= \left\|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{stA_n}\mathrm{e}^{t(1-s)A_m}x)\,\mathrm{d}s\right\|_X \\ &= \left\|\int_0^1 \big(tA_n\mathrm{e}^{stA_n}\mathrm{e}^{t(1-s)A_m}x - \mathrm{e}^{stA_n}tA_m\mathrm{e}^{t(1-s)A_m}x\big)\,\mathrm{d}s\right\|_X \\ &= \left\|\int_0^1 t\mathrm{e}^{stA_n}\mathrm{e}^{t(1-s)A_m}(A_n - A_m)x\,\mathrm{d}s\right\|_X \\ &\leq t\int_0^1 \|T_n(st)\|_{\mathcal{L}(X)}\|T_m\big(t(1-s)\big)\|_{\mathcal{L}(X)}\,\mathrm{d}s\|(A_n - A_m)x\|_X \\ &\leq t\|(A_n - A_m)x\|_X.\end{aligned}$$

Zu (c): Für $x \in D(A)$ gilt

$$nR(n,A)x = x + AR(n,A)x = x + R(n,A)Ax \to x \quad (n \to \infty),$$

denn $\|R(n,A)Ax\|_X \leq \|Ax\|_X/n \to 0$ $(n \to \infty)$ nach Voraussetzung. Nun ist $D(A)$ dicht in X. Also gibt es für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in D(A)$ mit $\|x_\varepsilon - x\|_X \leq \varepsilon$. Damit gilt für jedes $x \in X$

$$\begin{aligned}\|nR(n,A)x - x\|_X &\leq \|nR(n,A)(x - x_\varepsilon)\|_X + \|nR(n,A)x_\varepsilon - x_\varepsilon\|_X + \|x_\varepsilon - x\|_X \\ &\leq \|nR(n,A)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x - x_\varepsilon\|_X + \|nR(n,A)x_\varepsilon - x_\varepsilon\|_X + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\end{aligned}$$

für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Also gilt sogar

$$\lim_{n\to\infty} nR(n,A)x = x \quad \text{für alle } x \in X.$$

Damit folgt schließlich für alle $x \in D(A)$

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} nAR(n,A)x = \lim_{n\to\infty} nR(n,A)Ax = Ax.$$

$\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns nun dem Beweis des Satzes von Hille-Yosida zuwenden.

Beweis von „(b)⇒(a)“ in Theorem 2.1. Es sei wieder A_n, $n \in \mathbb{N}$, die Yosida-Approximation von A und $T_n(t) = \mathrm{e}^{tA_n}$, $t \geq 0$, jeweils die von A_n erzeugte normstetige Halbgruppe auf X.
Sei $x \in D(A)$. Dann ist nach Lemma 2.4 (c) die Folge $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X und wegen (b) des selben Lemmas konvergiert die Folge $(T_n(t)x)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in D(A)$ gleichmäßig für t in kompakten Intervallen.
Sei nun $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es wegen der Dichtheit von $D(A)$ in X wieder ein $x_\varepsilon \in D(A)$ mit $\|x - x_\varepsilon\|_X < \varepsilon$ und wir haben für alle $t \geq 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß dank Lemma 2.4 (a)

$$\begin{aligned}\|T_n(t)x - T_m(t)x\|_X &\leq \|T_n(t)(x - x_\varepsilon) - T_m(t)(x - x_\varepsilon)\|_X + \|T_n(t)x_\varepsilon - T_m(t)x_\varepsilon\|_X \\ &\leq 2\|x - x_\varepsilon\|_X + \varepsilon \leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge $(T_n(t)x)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar für jedes $x \in X$ gleichmäßig für t in kompakten Intervallen. Wir setzen also für jedes $x \in X$

$$T(t)x := \lim_{n\to\infty} T_n(t)x = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{tA_n}x.$$

Dann ist $t \mapsto T(t)x$ als (lokal) gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen stetig, also ist T stark-stetig. Weiter übertragen sich die Eigenschaften $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ für alle $s, t \geq 0$ und $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ offensichtlich direkt von den Halbgruppen T_n, $n \in \mathbb{N}$. Also ist T eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen.
Es bleibt uns zu zeigen, dass A der Erzeuger von T ist. Sei dazu $(B, D(B))$ der Erzeuger von T und $x \in D(A)$. Dann gilt mit Hilfe von (c) aus Satz 1.16 und den oben gezeigten Konvergenzaussagen

$$T(t)x - x = \lim_{n\to\infty} T_n(t)x - x = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T_n(s)A_n x \,\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)Ax \,\mathrm{d}s.$$

Also folgt

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax \,\mathrm{d}s = Ax$$

und nach Satz 1.16 (f) ist damit $x \in D(B)$ mit $Bx = Ax$. Wir haben also $A \subseteq B$.
Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion verwenden wir die folgende

Zwischenbehauptung: Sind $(A, D(A))$ und $(B, D(B))$ lineare Operatoren auf einem Banachraum X mit $A \subseteq B$ und sind sowohl $A : D(A) \to X$ als auch $B : D(B) \to X$ bijektiv, so gilt $A = B$.

> Dies lässt sich sehr schnell einsehen: Für alle $x \in D(A)$ gilt wegen $A \subseteq B$ und der Bijektivität von B sofort $x = B^{-1}Ax$. Damit gilt für jedes $x \in D(B)$ wegen $A^{-1}Bx \in D(A)$ die Beziehung
> $$x = B^{-1}AA^{-1}Bx = A^{-1}Bx \in D(A).$$
> Also ist $B \subseteq A$, d.h. $A = B$.

Wählen wir in unserem Beweis des Satzes von Hille-Yosida nun ein $\lambda > 0$ fest, so ist nach dem schon Gezeigten $\lambda - A \subseteq \lambda - B$. Außerdem ist $\lambda - A : D(A) \to X$ nach Voraussetzung bijektiv. Weiter ist B Erzeuger einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen. Also ist $\lambda \in \varrho(B)$ (vgl. die umgekehrte Richtung dieses Beweises), d.h. $\lambda - B : D(B) \to X$ bijektiv. Obige Zwischenbehauptung liefert nun $A = B$. □

Wendet man das Rescaling (vgl. Satz 2.2) auf den Satz von Hille-Yosida an, so erhält man

Korollar 2.5. *Es sei $(A, D(A))$ ein linearer, dicht definierter Operator in einem Banachraum X und $\omega \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) *A erzeugt eine C_0-Halbgruppe T auf X mit $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \ge 0$.*
(b) *$(\omega, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{\lambda - \omega}$ für alle $\lambda > \omega$.*
(c) *$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) > \omega\} \subseteq \varrho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda) - \omega}$ für alle diese λ.*

Man beachte, dass hier in der exponentiellen Abschätzung der Halbgruppe $M = 1$ sein muss. Tatsächlich sind die Halbgruppen für die $M > 1$ gewählt werden muss die „kompliziertesten“. Für diese gibt es (bisher?) nur die folgende, deutlich schwerfälligere Charakterisierung.

Theorem 2.6 (Hille-Yosida, allgemeine Form (Feller, Miyadera, Phillips, 1952)). *Es sei $(A, D(A))$ ein linearer, dicht definierter Operator in einem Banachraum X, $M \ge 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) *A erzeugt eine C_0-Halbgruppe T auf X mit $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \ge 0$.*
(b) *$(\omega, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und $\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$ für alle $\lambda > \omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$.*
(c) *$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) > \omega\} \subseteq \varrho(A)$ und $\|R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)^n}$ für alle diese λ und alle $n \in \mathbb{N}$.*

Der im obigen vorgestellte Beweis des Hille-Yosida-Theorems geht auf die Beweisidee von Yosida zurück. Hilles Ansatz war die Umformung

$$\mathrm{e}^{ta} = (\mathrm{e}^{-ta})^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{ta}{n}\right)^{-n}.$$

Das führt tatsächlich zu folgendem Zusammenhang.

Satz 2.7. *Es sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X. Dann gilt für jedes $x \in X$*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left[I - \tfrac{t}{n}A\right]^{-n}x = \lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{n}{t}R(\tfrac{n}{t}, A)\right]^n x$$

gleichmäßig für t in kompakten Intervallen.

Die Stärke des Satzes von Hille-Yosida ist, dass er die Frage, ob das parabolische Problem aus (ACP) lösbar ist, auf die einfachere Frage zurückspielt, ob das elliptische Eigenwert-Problem $\lambda u - Au = f$ für alle $f \in X$ und ausreichend viele λ gut lösbar ist. Wobei „gut lösbar“ eben genau bedeutet, dass die Resolventenabschätzung aus dem Theorem von Hille-Yosida erfüllt ist.

3. Der Satz von Lumer-Phillips

Wir stellen in diesem kurzen Abschnitt einen weiteren oft verwendeten Charakterisierungssatz für kontraktive C_0-Halbgruppen vor.

Definition 3.1. *Es sei $(A, D(A))$ ein linearer Operator auf einem Banachraum X. Dann heißt A* dissipativ, *genau dann wenn*

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq \lambda\|x\|_X \qquad \text{für alle } \lambda > 0 \text{ und } x \in D(A).$$

Wir sammeln einige Eigenschaften dissipativer Operatoren.

Lemma 3.2. *Es sei $(A, D(A))$ ein dissipativer Operator auf einem Banachraum X. Dann gilt*

(a) *$\lambda - A$ ist injektiv für alle $\lambda > 0$ und $\|(\lambda - A)^{-1}y\|_X \leq \frac{1}{\lambda}\|y\|_X$ für alle $y \in \mathrm{Im}(\lambda - A)$.*

(b) *$\lambda - A$ ist genau dann für ein $\lambda > 0$ surjektiv, wenn das für alle $\lambda > 0$ gilt. In diesem Fall ist $(0, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.*

(c) *A ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathrm{Im}(\lambda - A)$ für ein (bzw. äquivalent alle) $\lambda > 0$ abgeschlossen in X ist.*

(d) *Gilt $\mathrm{Im}(A) \subseteq \overline{D(A)}$, so ist A abschließbar, $\overline{A}$ dissipativ und $\mathrm{Im}(\lambda - \overline{A}) = \overline{\mathrm{Im}(\lambda - A)}$.*

Beweis. Die Aussagen in (a), (c) und (d) behandeln wir in der Übung und beweisen hier (b). Dazu erinnern wir an die Neumannsche Reihe, mit der man in der Funktionalanlysis die Offenheit der Resolventenmenge eines abgeschlossenen Operators zeigt: Ist $\mu \in \varrho(A)$, so gilt auch $\lambda \in \varrho(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \mu| < \|R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)}^{-1}$.

Sein nun $\lambda_0 - A$ surjektiv für ein $\lambda_0 > 0$. Dann gilt wegen (a) sofort $\lambda_0 \in \varrho(A)$ und

$$\|R(\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda_0}.$$

Mit obiger Vorbemerkung gilt also $(0, 2\lambda_0) \subseteq \varrho(A)$ und mit (a) haben wir wieder $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/\lambda$ für alle diese λ. Insbesondere ist $\frac{3}{2}\lambda_0 \in \varrho(A)$ mit $\|R(\frac{3}{2}\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{2}{3\lambda_0}$. Daraus folgt nun wieder $(0, 3\lambda_0) \in \varrho(A)$ und wir können immer so weiter machen. Da die Intervalle, die wir dazu bekommen, sogar mit großem λ immer größer werden, bekommen wir so $(0, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und die behauptete Abschätzung folgt dann aus (a). $\square$

Theorem 3.3 (Lumer-Phillips, 1961). *Es sei $(A, D(A))$ ein dicht definierter, dissipativer Operator auf einem Banachraum X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) $\overline{A}$ erzeugt eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen auf X.
(b) Es gibt ein $\lambda_0 > 0$ mit $\overline{\mathrm{Im}(\lambda_0 - A)} = X$.

Beweis. Sei $\overline{A}$ Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf X. Dann ist nach dem Satz von Hille-Yosida $\mathrm{Im}(\lambda - \overline{A}) = X$ für jedes $\lambda > 0$. Also folgt mit Lemma 3.2 (d) die Aussage in (b) (Man beachte, dass dank der vorausgesetzten Dichtheit von $D(A)$ in X, die Voraussetzung $\mathrm{Im}(A) \subseteq \overline{D(A)}$ auf jeden Fall erfüllt ist).
Setzen wir nun umgekehrt (b) voraus, so folgt wieder aus Lemma 3.2 (d) die Beziehung $\mathrm{Im}(\lambda_0 - \overline{A}) = \overline{\mathrm{Im}(\lambda_0 - A)} = X$. Damit ist $\lambda_0 - \overline{A}$ surjektiv und da $\overline{A}$ nach Lemma 3.2 (d) auch dissipativ ist folgt aus (b) desselben Lemmas $(0, \infty) \subseteq \varrho(\overline{A})$ mit $\|R(\lambda, \overline{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/\lambda$ für alle $\lambda > 0$. Damit folgt die Aussage in (a) aus dem Theorem von Hille-Yosida. $\square$

Meist verwendet man folgende Verschärfung obigen Satzes um ein Erzeuger-Resultat für den Operator selbst und nicht nur für den Abschluss zu bekommen.

Korollar 3.4. *Ein Operator $(A, D(A))$ auf einem Banachraum X erzeugt dort genau dann eine C_0-Halbgruppe von Kontraktionen, wenn er dicht definiert, sowie dissipativ ist und $\lambda - A$ für ein $\lambda > 0$ surjektiv ist.*

Wir betrachten zum Abschluss noch die spezielle Situation eines Hilbertraums.

Satz 3.5. *Ist $(A, D(A))$ ein linearer Operator auf einem Hilbertraum H, so ist A genau dann dissipativ, wenn $\mathrm{Re}(Au \mid u) \leq 0$ für alle $u \in D(A)$ gilt.*

Beweis. Für alle $u \in D(A)$ und alle $\lambda > 0$ gilt

$$\|\lambda u - Au\|_H^2 = \lambda^2 \|u\|_H^2 - 2\lambda \mathrm{Re}(Au \mid u) + \|Au\|_H^2. \tag{44}$$

Ist nun $\mathrm{Re}(Au \mid u) \leq 0$, so folgt daraus sofort

$$\|(\lambda - A)u\|_H^2 \geq \lambda^2 \|u\|_H^2$$

und damit die Dissipativität von A.

Ist umgekehrt A dissipativ so haben wir mit (44)

$$\begin{aligned} -2\mathrm{Re}(Au \mid u) &= \frac{1}{\lambda}\underbrace{\left(\|(\lambda - A)u\|_H^2 - \lambda^2\|u\|_H^2\right)}_{\geq 0} - \frac{1}{\lambda}\|Au\|_H^2 \\ &\geq -\frac{1}{\lambda}\|Au\|_H^2 \qquad \text{für alle } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Lässt man nun λ nach Unendlich streben, so erhält man die Behauptung. □

4. Holomorphe C_0-Halbgruppen

Eine wichtige Klasse von besonders schönen Halbgruppen, d.h. solchen die besonders reguläre Lösungen von (ACP) liefern, sind die *holomorphen Halbgruppen*, die wir in diesem Abschnitt einführen wollen. Dazu brauchen wir erst einen Holomorphie-Begriff für Banachraum-wertige Funktionen.

DEFINITION 4.1. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, X ein Banachraum und $f : \Omega \to X$ eine Funktion. f ist* holomorph *in G, falls*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

für alle $z_0 \in G$ existiert.

BEMERKUNG 4.2. *Es gibt noch eine Reihe äquivalenter Definitionen für Holomorphie:*

$$\begin{aligned} f \text{ holomorph in } \Omega &\iff \varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorph für alle } \varphi \in X' \\ &\qquad \text{(schwache Holomorphie)} \\ &\iff f \text{ ist um jedes } z_0 \in \Omega \text{ in Potenzreihe entwickelbar.} \end{aligned}$$

DEFINITION 4.3. *(a) Für $\theta \in (0, \pi]$ notieren wir*

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \theta\}.$$

(b) Sei $\theta \in (0, \pi/2]$. Eine Abbildung $T : \Sigma_\theta \cup \{0\} \to \mathcal{L}(X)$ heißt holomorphe C_0-Halbgruppe *vom Winkel θ, falls*
- *$T : \Sigma_\theta \to \mathcal{L}(X)$ holomorph.*
- *$T(0) = I$ und $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \Sigma_\theta$.*
- *$\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Sigma_\vartheta}} T(z)x = x$ für alle $x \in X$ und alle $\vartheta \in (0, \theta)$.*

(c) Eine holomorphe Halbgruppe vom Winkel θ heißt beschränkt, *falls die Abbildung $T|_{\Sigma_\vartheta} : \Sigma_\vartheta \to \mathcal{L}(X)$ für jedes $\vartheta \in (0, \theta)$ beschränkt ist.*

Offensichtlich ist für jede holomorphe C_0-Halbgruppe T vom Winkel θ die Abbildung $T|_{[0,\infty)} : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ eine C_0-Halbgruppe, genauso wie die Abbildung $T_\alpha : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ mit $T_\alpha(t) := T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}t)$ für jedes $\alpha \in (-\theta, \theta)$. Wir bestimmen deren Erzeuger.

LEMMA 4.4. *Es sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer holomorphen C_0-Halbgruppe vom Winkel θ und $\alpha \in (-\theta, \theta)$. Dann ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}A$ der Erzeuger der C_0-Halbgruppe T_α.*

Beweis. Wir bezeichnen den Erzeuger von T_α mit B. Dann gilt für $x \in D(B)$ und $s > 0$ dank der Holomorphie von T in Σ_θ

$$\begin{aligned}T_\alpha(s)Bx &= \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} T_\alpha(s)(T_\alpha(t)x - x) = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\big[T_\alpha(s+t)x - T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}s)x\big] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}t}\big[T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}s + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}t)x - T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}s)x\big] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}T'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}s)x \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\big[T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}s + t)x - T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}s)x\big] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\big[T(t)T_\alpha(s)x - T_\alpha(s)x\big] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\big[T(t)x - x\big]T_\alpha(s)x.\end{aligned}$$

Da damit dieser letzte Grenzwert existiert, gilt $T_\alpha(s)x \in D(A)$ und $T_\alpha(s)Bx = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}AT_\alpha(s)x$ für alle $x \in D(B)$ und alle $s > 0$. Für $s \to 0$ konvergiert $T_\alpha(s)x$ gegen x und $AT_\alpha(s)x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}T_\alpha(s)Bx$ gegen $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}Bx$. Wegen der Abgeschlossenheit von A ist damit $x \in D(A)$ und es gilt $Ax = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}Bx$.
Zusammengenommen haben wir damit $D(B) \subseteq D(A)$ mit $Bx = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}Ax$ für alle $x \in D(B)$. Genauso zeigt man $D(A) \subseteq D(B)$ mit $Bx = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}Ax$ für alle $x \in D(A)$ und erhält $B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}A$. □

Spannend ist die umgekehrte Frage: Wann kann eine gegebene C_0-Halbgruppe holomorph fortgesetzt werden?

Lemma 4.5. *Es sei $\theta \in (0, \pi/2]$, $T : \Sigma_\theta \to \mathcal{L}(X)$ holomorph und $T|_{[0,\infty)}$ eine C_0-Halbgruppe. Dann gilt*
- *(a) $T(z+w) = T(z)T(w)$ für alle $w, z \in \Sigma_\theta$.*
- *(b) Für alle $\vartheta \in (0,\theta)$ gibt es Konstanten $M \geq 0$ und $\omega \geq 0$ mit $\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\mathrm{e}^{\omega \mathrm{Re}(z)}$ für alle $z \in \Sigma_\vartheta$.*
- *(c) T ist eine holomorphe C_0-Halbgruppe.*

Beweis. **Zu (a):** Sei $t \in (0,\infty)$ fest. Dann sind die Abbildungen $T(\cdot + t) : \Sigma_\theta \to \mathcal{L}(X)$ und $T(\cdot)T(t) : \Sigma_\theta \to \mathcal{L}(X)$ holomorph und es gilt $T(s)T(t) = T(s+t)$ für alle $s, t \in [0,\infty)$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen sind die beiden Funktionen also auf ganz Σ_θ gleich, d.h. es gilt $T(z+t) = T(z)T(t)$ für alle $z \in \Sigma_\theta$ und alle $t > 0$.
Macht man nun das gleiche Spielchen noch einmal für festgehaltenes $z \in \Sigma_\theta$ mit den Funktionen $T(z + \cdot)$ und $T(z)T(\cdot)$, so erhält man $T(z+w) = T(z)T(w)$ für alle $w, z \in \Sigma_\theta$.
Zu (b): Sei $\vartheta \in (0,\theta)$ vorgegeben und

$$M := \sup\{\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} : z \in \Sigma_\vartheta,\ |z| \leq 1\} \quad \text{sowie} \quad \tilde{\omega} := \max\{\log(M), 0\}.$$

Sei nun $z \in \Sigma_\vartheta$ und $z = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$. Dann gilt (vgl. den Beweis von Satz 1.13)

$$\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\mathrm{e}^{\log(M)t} = M\mathrm{e}^{\log(M)|z|}.$$

Wegen $z \in \Sigma_\vartheta$ gilt $|z| \leq \mathrm{Re}(z)/\cos(\vartheta)$, also folgt für $\log(M) \geq 0$

$$\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\mathrm{e}^{\frac{\log(M)}{\cos(\vartheta)}\mathrm{Re}(z)}.$$

Insgesamt folgt also die Behauptung mit $\omega := \tilde{\omega}/\cos(\vartheta)$.
Zu (c): Es ist nur noch die Starkstetigkeit (dritter Punkt von Definition 4.3 (b)) nachzuweisen. Sei also $\vartheta \in (0, \theta)$. Dann gibt es nach (b) $M, \omega \geq 0$ mit $\|e^{-\omega z} T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ für alle $z \in \Sigma_\vartheta$. Die Behauptung folgt dann aus dem folgenden funktionentheoretischen Satz:

> Sei X ein Banachraum, $\alpha \in (0, \pi]$ und $f : \Sigma_\alpha \to X$ holomorph mit $\sup_{z \in \Sigma_\beta} \|f(z)\|_X < \infty$ für alle $0 < \beta < \alpha$. Ist dann $\lim_{t \searrow 0} f(t) = x$ für ein $x \in X$, so gilt auch für jedes $\beta \in (0, \alpha)$.
> $$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \Sigma_\beta}} f(z) = x.$$

□

Die exponentielle Beschränktheit holomorpher Halbgruppen nach Lemma 4.5 (b) bietet nun wieder die Möglichkeit zum Rescaling. Das liefert das folgende Ergebnis.

Satz 4.6. *Ein Operator A in einem Banachraum X erzeugt genau dann eine holomorphe Halbgruppe, wenn es ein $\omega \geq 0$ gibt, so dass $A - \omega$ eine beschränkte holomorphe Halbgruppe erzeugt.*

Der Charkaterisierungssatz für Erzeuger holomorpher Halbgruppen ist wie folgt.

Theorem 4.7. *Es sei $(A, D(A))$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator in einem Banachraum X und $\theta \in (0, \pi/2]$. Dann erzeugt A genau dann eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe vom Winkel θ, wenn $\Sigma_{\pi/2+\theta} \subseteq \varrho(A)$ gilt und für jedes $\vartheta \in (0, \theta)$ ein $M_\vartheta > 0$ existiert mit*
$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\vartheta}{|\lambda|} \quad \text{für alle } \lambda \in \Sigma_{\pi/2+\vartheta}.$$

Wir wollen diesen hier nicht beweisen. Nachlesen kann man ihn zum Beispiel im Buch von Engel/Nagel[1], Abschnitt II.4.a.
Braucht man keine Information über den Winkel θ, so genügt es die abgeschlossene rechte Halbebene zu betrachten.

Korollar 4.8. *Es sei $(A, D(A))$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator in einem Banachraum X. Dann erzeugt A genau dann eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe, wenn $\Sigma_{\pi/2} \subseteq \varrho(A)$ ist und*
$$\sup_{\mathrm{Re}(\lambda) > 0} \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$$
gilt.

Beweis. Übung □

Den allgemeinen Fall nicht unbedingt beschränkter Halbgruppen können wir wieder mittels Rescaling erledigen.

[1] K.-J. Engel und R. Nagel: *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Bd. 194 von Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

Korollar 4.9. *Es sei $(A, D(A))$ ein dicht definierter und abgeschlossener Operator in einem Banachraum X. Dann erzeugt A genau dann eine holomorphe C_0-Halbgruppe, wenn es ein $r > 0$ mit $\Sigma_{\pi/2} \setminus B_r(0) \subseteq \varrho(A)$ gibt und*

$$\sup\{\|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} : \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \text{ und } |\lambda| > r\} =: M < \infty$$

gilt.

Beweis. Es sei $\omega > r$. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ auch $\mathrm{Re}(\lambda + \omega) > 0$ und $|\lambda + \omega| > r$. Damit haben wir nach Voraussetzung

$$\|\lambda R(\lambda, A - \omega)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\lambda R(\lambda + \omega, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M.$$

Also erzeugt der Operator $A - \omega$ nach Korollar 4.8 eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe und damit nach Satz 4.6 der Operator A eine holomorphe C_0-Halbgruppe. □

Ist T eine holomorphe C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X, so existiert nach Definition für jedes $z_0 \in \Sigma_\theta$ der Grenzwert $\lim_{z \to z_0}(T(z) - T(z_0))/(z - z_0)$ in $\mathcal{L}(X)$. Insbesondere existiert damit für jedes $x \in X$ und jedes $t > 0$ der Grenzwert $\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(T(t+h)x - T(t)x)$ in X. Nun gilt aber

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h},$$

d.h. mit Satz 1.16 (f) gilt für eine holomorphe C_0-Halbgruppe $T(t)x \in D(A)$ für alle $t > 0$ und alle $x \in X$. Das Besondere ist dabei, dass dieses nicht nur für Elemente des Definitionsbereiches von A gilt. Daraus lässt sich sogar noch mehr Regularität gewinnen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.10. *Sei T eine holomorphe C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Erzeuger $(A, D(A))$. Dann gilt*

(a) $T(t)(X) \subseteq D(A^n)$ und $A^n T(t)x = (AT(\frac{t}{n}))^n x$ für alle $x \in X$, $t > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) T ist eine differenzierbare Halbgruppe*, d.h. die Abbildung $t \mapsto T(t)x$ ist für jedes $x \in X$ beliebig oft differenzierbar auf* $(0, \infty)$.

Beweis. **Zu (a):** Wir führen eine Induktion nach n und bemerken, dass der Fall $n = 1$ in der Vorbemerkung zu diesem Satz abgearbeitet ist. Es bleibt also der Induktionsschluss. Sei dazu $x \in X$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $T(s)x \in D(A^n)$ für jedes $s > 0$. Damit folgt für jedes $t > 0$

$$A^n T(t)x = A^n T(\tfrac{1}{n+1}t)T(\tfrac{n}{n+1}t)x = T(\tfrac{1}{n+1}t)A^n T(\tfrac{n}{n+1}t)x.$$

Nun ist natürlich auch $A^n T(\frac{n}{n+1}t)x \in X$, also ist mit Hilfe des Induktionsanfangs $A^n T(t)x \in D(A)$, was $x \in D(A^{n+1})$ bedeutet und es gilt mit der obigen Rechnung

$$\begin{aligned} A^{n+1}T(t)x &= AT(\tfrac{1}{n+1}t)A^n T(\tfrac{n}{n+1}t)x = AT(\tfrac{t}{n+1})A^n \big(T(\tfrac{t}{n+1})\big)^n x \\ &= AT(\tfrac{t}{n+1})\big(AT(\tfrac{t}{n+1})\big)^n x = \big(AT(\tfrac{t}{n+1})\big)^{n+1} x, \end{aligned}$$

da Halbgruppe und Erzeuger kommutieren, solange das Argument in $D(A)$ liegt (vgl. Satz 1.16).
Zu (b): Sei $x \in X$, $t > 0$ und $\varepsilon \in (0,t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A^n T(t)x &= AT(t-\varepsilon)A^{n-1}T(\varepsilon)x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(T(t-\varepsilon)A^{n-1}T(\varepsilon)x\big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(AT(t-\varepsilon)A^{n-2}T(\varepsilon)x\big) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\big(T(t-\varepsilon)A^{n-2}T(\varepsilon)x\big) \\ &= \cdots = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}T(t-\varepsilon)T(\varepsilon)x = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}T(t)x. \end{aligned}$$

□

Ist A Erzeuger einer holomorphen Halbgruppe, so folgt hieraus zweierlei für die Lösbarkeit von (ACP) aus 1.7. Erstens werden unsere Lösungen deutlich glatter und zweitens können wir die Gleichung dann für alle Anfangswerte $u_0 \in X$ (und nicht nur in $D(A)$) lösen. Wir fassen das im folgenden Korollar zusammen.

Korollar 4.11. *Ist $(A, D(A))$ Erzeuger einer holomorphen C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X und $u_0 \in X$, so ist*

$$u(t) := T(t)u_0 \in C^\infty((0,\infty);X) \cap C([0,\infty);X) \cap C((0,\infty);D(A))$$

die eindeutige Lösung von (ACP).

Das Erzeugerresultat für holomorphe Halbgruppen in Satz 4.7 erlaubt es, ebenso wie der Satz von Hille-Yosida, die Frage nach der Lösbarkeit des abstrakten Cauchy-Problems auf Lösbarkeitsaussagen für das (nicht mehr zeitabhängige!) elliptische Problem zurückzuspielen. Damit bekommen wir aus den Ergebnissen des Kapitels 6 sofort Aussagen über unsere Evolutionsgleichungen.
Wir betrachten also wieder einen Differentialoperator

$$Au(x) = \sum_{j,k=1}^{d} (\alpha_{j,k} + a_{j,k}(x))\partial_j\partial_k u(x) + \sum_{j=1}^{d} b_j(x)\partial_j u(x) + c(x)u(x)$$

mit $a_{j,k}, b_j, c \in L^\infty(\Omega)$, der die Elliptizitätsbedingung

$$-\sum_{j,k=1}^{d} \alpha_{j,k}\xi_j\xi_k \geq \delta|\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $\delta > 0$ erfüllt.
Ist Ω der ganze Raum $\mathbb{R}^d$, der Halbraum $\mathbb{R}^d_+$ oder ein beschränktes C^2-Gebiet so setzen wir für jedes $1 < p < \infty$ (vgl. Bemerkung 6.3.2)

$$\begin{aligned} D(A_{p,D}) &:= W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), &\quad A_{p,D}u &= Au, \\ D(A_{p,N}) &:= \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \nabla u|_{\partial\Omega} \cdot n = 0\}, &\quad A_{p,N}u &= Au \end{aligned}$$

und betrachten damit A als Differentialoperator auf $L^p(\Omega)$ einmal mit Dirichlet- und einmal mit Neumann-Randbedingungen. Für diese erhalten wir das folgende Resultat.

THEOREM 4.12. *Es sei $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\Omega = \mathbb{R}^d_+$ oder $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes C^2-Gebiet. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $A_{p,D}$ und $A_{p,N}$ Erzeuger holomorpher C_0-Halbgruppen sind, wann immer $\|a_{j,k}\|_\infty < \varepsilon$ gilt. Insbesondere gilt die Lösbarkeitsaussage für (ACP) aus Korollar 4.11 für diese Operatoren.*

BEWEIS. Da $C_c^\infty(\Omega) \subseteq D(A_{p,N/D})$ dicht in $L^p(\Omega)$ ist, sind beide Operatoren offensichtlich dicht definiert. Nach Theorem 1.2, Theorem 2.1, bzw. Theorem 3.1 in Kapitel 6 ist $\Sigma_{\pi/2} \setminus B_{\lambda_0}(0) \subseteq \varrho(A_{p,D/N})$ für ein geeignetes $\lambda_0 \geq 0$ und es gilt die Abschätzung (betrachte den Fall $\alpha = 0$ in (42))

$$\|R(\lambda, A)f\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|}\|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in L^p(\Omega),\ \lambda \in \Sigma_{\pi/2} \setminus B_{\lambda_0}(0).$$

Damit sind zum Einen $A_{p,D}$ und $A_{p,N}$ abgeschlossen und erfüllen zum Anderen die Resolventenabschätzung aus Korollar 4.9, woraus die Behauptung folgt. □

5. Das inhomogene Cauchy-Problem

Bisher haben wir für einen gegebenen Operator $(A, D(A))$ in einem Banachraum X das abstrakte Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) &= 0, \quad t > 0, \\ \qquad\quad u(0) &= u_0 \end{cases}$$

betrachtet. Dieses wird als *homogenes* ACP bezeichnet, da die rechte Seite Null ist. Wir wollen uns nun dem *inhomogenen* abstrakten Cauchy-Problem zuwenden, d.h. dem Problem

$$\text{(IACP)} \quad \begin{cases} u'(t) - Au(t) &= f(t), \quad t > 0, \\ \qquad\quad u(0) &= u_0, \end{cases}$$

mit einer gegebenen Funktion $f : [0, \infty) \to X$.
Gesucht sind Bedingungen an A, f und u_0, die eine „vernünftige" Lösbarkeit dieses Problems sichern. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter einer Lösung von (IACP) verstehen.

DEFINITION 5.1. *Eine Funktion $u : [0, \infty) \to X$ heißt* klassische Lösung *von (IACP), falls*

- *$u(t) \in D(A)$ für alle $t > 0$,*
- *$u \in C([0, \infty); X) \cap C^1((0, \infty); X)$ und*
- *u löst (IACP).*

Wir fassen zunächst unsere bisherigen Ergebnisse über (ACP) in dieser neuen Sprechweise zusammen.

Satz 5.2. *Ist $(A, D(A))$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X, so gilt*

(a) Für jedes $u_0 \in D(A)$ ist $u(t) := T(t)u_0$ die eindeutige klassische Lösung von (ACP).
(b) Ist T zusätzlich holomorph, so ist obeiges u sogar für jedes $u_0 \in X$ die eindeutige klassische Lösung von (ACP).

Da wir es bei (IACP) mit einer linearen Differentialgleichung zu tun haben, können wir die Lösung bekommen, indem wir (IACP) mit $u_0 = 0$ lösen und diese Lösung dann zur Lösung von (ACP) addieren. Wir betrachten also im Folgenden das Problem

$$(\mathrm{IACP}_0) \quad \begin{cases} u'(t) - Au(t) &= f(t), \quad t > 0, \\ \qquad\quad u(0) &= 0. \end{cases}$$

Um die Lösung von (IACP_0) zu erraten, verwenden wir wieder dreist unsere Parallele zur Analysis III. Ein solches inhomogenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen (d.h. A ist eine Matrix) haben wir dort mit Hilfe der *Variation-der-Konstanten-Formel* durch

$$u(t) := \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s)\,\mathrm{d}s$$

gelöst. Also versuchen wir unser Glück mit dem Ansatz

$$u(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

wobei T die von A erzeugte Halbgruppe ist.

Satz 5.3. *Sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T auf X und entweder*

(a) $f \in C([0,\infty); D(A))$ oder
(b) $f \in C^1([0,\infty); X)$.

Dann existiert genau eine klassische Lösung u von ($IACP_0$) und es gilt

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Zum Beweis verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 5.4. *Ist $(A, D(A))$ ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum X, $f : [a,b] \to X$ integrabel mit $f(t) \in D(A)$ für fast alle $t \in [a,b]$ und ist $Af : [a,b] \to X$ ebenfalls integrabel, so gilt*

$$\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s \in D(A) \quad \text{und} \quad A\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b Af(s)\,\mathrm{d}s.$$

Beweis von Satz 5.3. **Eindeutigkeit:** Sind u und v klassische Lösungen von (IACP$_0$), so ist $w := u - v$ eine klassische Lösung von (ACP) mit $u_0 = 0$. Dieses hat aber (s. Satz 5.2) nur eine klassische Lösung und die ist Null. Also ist $u = v$.
Existenz: Wir setzen

$$u(t) := \int_0^t T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Befinden wir uns in **Fall (a)**, so gilt nach Satz 1.16 (b) sofort $T(t-s)f(s) \in D(A)$ für jedes $s \in [0,t]$ und damit ist $u(t)$ mit Hilfe von Lemma 5.4 in $D(A)$ für jedes $t \geq 0$ und es gilt

$$Au(t) = \int_0^t AT(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Außerdem ist $s \mapsto T(t-s)f(s)$ eine stetige Funktion, also ist nach dem Hauptsatz die Funktion $u \in C([0,\infty);X) \cap C^1((0,\infty);X)$.
Schließlich gilt offensichtlich $u(0) = 0$ und wir erhalten für alle $t > 0$

$$u'(t) = T(0)f(t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t-s)f(s)\mathrm{d}s = f(t) + \int_0^t AT(t-s)f(s)\mathrm{d}s = f(t) + Au(t).$$

Also ist u eine klassische Lösung von (IACP$_0$).

Wir wenden uns dem **Fall (b)** zu. Dieser ist delikater, da nun der Integrand i.A. nicht in $D(A)$ liegen muss. Wir können deshalb nur den Beweis der Aussage $u \in C([0,\infty);X) \cap C^1((0,\infty);X)$ von oben übernehmen und zeigen zunächst, dass $u(t) \in D(A)$ für alle $t \geq 0$ gilt. Da f stetig differenzierbar vorausgesetzt ist, gilt mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t T(t-s)\Big(f(0) + \int_0^s f'(r)\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t T(t-s)f(0)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \int_r^t T(t-s)f'(r)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Nun substituieren wir $\tau := t - s$ und erhalten

$$u(t) = \int_0^t T(\tau)f(0)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_0^{t-r} T(\tau)f'(r)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}r \in D(A) \tag{45}$$

nach Satz 1.16 (d) und Lemma 5.4.
Es bleibt zu zeigen, dass u (IACP$_0$) löst. Dabei ist wieder $u(0) = 0$ offensichtlich, wir betrachten also $u'(t)$. Um zu sehen, dass wir unter dem Integral

differenzieren können, substituieren wir wieder $\tau = t - s$ und erhalten

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t T(\tau) f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = T(t)f(0) + \int_0^t T(\tau) f'(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s) f'(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Wenden wir nun A auf die Gleichung (45) an, so erhalten wir mit Satz 1.16 (d)

$$\begin{aligned} Au(t) &= A \int_0^t T(\tau) f(0)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t A \int_0^{t-r} T(\tau) f'(r)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}r \\ &= T(t)f(0) - f(0) + \int_0^t \big(T(t-r)f'(r) - f'(r)\big)\,\mathrm{d}r \\ &= T(t)f(0) - f(0) - f(t) + f(0) + \int_0^t T(t-r) f'(r)\,\mathrm{d}r \\ &= -f(t) + u'(t). \end{aligned}$$

Also gilt $u'(t) - Au(t) = f(t)$ für alle $t > 0$ und der Beweis ist beendet. □

Ein entsprechendes Lösbarkeitsresultat, falls A sogar eine holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt, geben wir im Folgenden nur an. Ein Beweis findet sich z.B. im Buch von Pazy[2] in Kapitel 4, Korollar 3.3. Wie zu erwarten ist, kann man in diesem Fall die Voraussetzungen an f weiter abschwächen.

Theorem 5.5. *Sei X ein Banachraum und $(A, D(A))$ Erzeuger einer holomorphen C_0-Halbgruppe T auf X. Ist $f : [0,\infty) \to X$ lokal Hölder-stetig, d.h. für jedes $\tau \in (0,\infty)$ gibt es ein $C \geq 0$ und ein $\alpha \in (0,1]$ mit*

$$\|f(t) - f(s)\|_X \leq C|t-s|^\alpha, \qquad \text{für alle } s,t \in [0,\tau],$$

so hat (IACP$_0$) *die eindeutige klassische Lösung $u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$.*

Zum Abschluss dieses Kapitels bemerken wir noch, dass der formale Ausdruck für die Lösung von (IACP), also

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,$$

schon unter deutlich geringeren Voraussetzungen an f als in den obigen Theoremen sinnvoll zu definieren ist.

[2] A. Pazy: *Semigroups fo Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, 1983.

Definition 5.6. *Ist X ein Banachraum, $(A, D(A))$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T auf X und $f \in L^1((0,\infty); X)$, so heißt die Funktion*

$$u(t) := T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

die milde Lösung *von (IACP).*

Die oben angeführten Theoreme können also auch als Kriterien aufgefasst werden, unter welchen Voraussetzungen die milde Lösung sogar eine klassische ist.
Zusammenfassend haben wir folgendes gezeigt:

Theorem 5.7. *Sei $(A, D(A))$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X, $u_0 \in X$ und $f \in L^1((0,\infty); X)$. Dann ist die milde Lösung u von (IACP) die eindeutige klassische Lösung, falls*

(a) $u_0 \in D(A)$ und entweder $f \in C([0,\infty); D(A))$ oder $f \in C^1([0,\infty); X)$

oder

(b) A erzeugt eine holomorphe Halbgruppe und f ist lokal Hölder-stetig.

KAPITEL 8

Gauß-Abschätzungen für Divergenzform-Operatoren

1. Das Dunford-Pettis-Theorem

DEFINITION 1.1. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Wir bezeichnen mit*

$$L^p(\Omega)_+ := \{f \in L^p(\Omega) : f \geq 0 \text{ fast überall}\}$$

den Kegel der positiven L^p-Funktionen.
Weiter heißt ein Operator $B \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ positiv, *falls $Bf \geq 0$ für alle $f \in L^p(\Omega)_+$ gilt. Wir schreiben dann $B \geq 0$.*
Gilt für zwei Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ die Beziehung $B - A \geq 0$, so schreiben wir auch $A \leq B$.

Man beachte, dass $A \leq B$ genau dann gilt, wenn $f \geq 0$ die Ungleichung $Af \leq Bf$ impliziert.
Wir untersuchen wieder Kernoperatoren, erneut mit einem etwas anderen Schwerpunkt. Wir betrachten brave L^∞-Kerne, geben dafür allerdings die Faltungsstruktur auf. Das hängt damit zusammen, dass wir im Folgenden auf offenen Teilmengen Ω des $\mathbb{R}^d$ arbeiten wollen und Kernoperatoren dort offensichtlich keine Faltungsstruktur haben können, da für $x, y \in \Omega$ der Vektor $x - y$ nicht in Ω zu liegen braucht.

LEMMA 1.2. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Für $k \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ betrachten wir den Operator mit*

$$(B_k f)(x) := \int_\Omega k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y, \qquad f \in L^1(\Omega). \tag{46}$$

Dann gilt $B_k \in \mathcal{L}(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$.

BEWEIS. Nach der Hölderschen Ungleichung mit $p = 1$ und $q = \infty$ gilt

$$|B_k f(x)| = \left| \int_\Omega k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y \right| \leq \|k(x,\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \|f\|_{L^1(\Omega)} \qquad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Also ist $\|B_k f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|k\|_{L^\infty(\Omega \times \Omega)} \|f\|_{L^1(\Omega)}$ und die Behauptung bewiesen. □

Interessant ist, dass auch die Umkehrung gilt.

Theorem 1.3 (Dunford-Pettis). *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Die Abbildung*

$$\Phi : \begin{cases} L^\infty(\Omega \times \Omega) & \to \mathcal{L}(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)) \\ k & \mapsto B_k, \end{cases}$$

wobei B_k mit Hilfe von k wie in (46) definiert ist, ist ein isometrischer Isomorphismus.
Weiter gilt $B_k \geq 0 \iff k \geq 0$ fast überall.

Beweis. Für $f, g \in L^1(\Omega)$, betrachten wir die Funktion $f \otimes g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y)$ (Tensor-Schreibweise). Dann gilt offensichtlich

$$\|f \otimes g\|_{L^1(\Omega\times\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^1(\Omega)}.$$

Außerdem ist die Menge der Treppenfunktionen

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{1}_{E_j} \otimes \mathbf{1}_{F_j} \;\middle|\; N \in \mathbb{N},\ c_j \in \mathbb{R},\ E_j, F_j \subseteq \Omega \text{ messbar},\ |E_j|, |F_j| < \infty \right\}$$

dicht in $L^1(\Omega)$.
In Lemma 1.2 haben wir bereits gesehen, dass Φ ein stetiger, linearer Operator mit Operatornorm höchstens eins ist. Es bleibt also zu zeigen, dass Φ surjektiv und isometrisch ist. Sei dazu $B \in \mathcal{L}(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$ gegeben. Wir definieren dann für $u = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{1}_{E_j} \otimes \mathbf{1}_{F_j} \in \mathcal{F}$ das Funktional $\varphi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(u) := \sum_{j=1}^N c_j \int_\Omega (B\mathbf{1}_{E_j})(y) \mathbf{1}_{F_j}(y) \,\mathrm{d}y.$$

Diese Definition ist unabhängig von der spezifischen Wahl der Repräsentation der Funktion u.
Sei nun $u \in \mathcal{F}$. Dann können wir eine Darstellung von $u = \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{1}_{E_j} \otimes \mathbf{1}_{F_j}$ insbesondere so wählen, dass

$$(E_j \times F_j) \cap (E_k \times F_k) = \emptyset \qquad \text{für alle } j \neq k$$

gilt, denn sollte das nicht der Fall sein, können wir alle Schnittmengen als separate Blocks in die Zerlegung mit aufnehmen.
Nun gilt dank dieser Wahl

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1(\Omega\times\Omega)} &= \int_{\Omega\times\Omega} \left| \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{1}_{E_j}(x) \mathbf{1}_{F_j}(y) \right| \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} \sum_{j=1}^N |c_j| \mathbf{1}_{E_j}(x) \mathbf{1}_{F_j}(y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^N |c_j||E_j||F_j|. \end{aligned}$$

Das liefert mit Lemma 1.2

$$\begin{aligned}|\varphi(u)| &\leq \sum_{j=1}^{N} |c_j| \left| \int\limits_\Omega (B\mathbf{1}_{E_j})(y)\mathbf{1}_{F_j}(y)\,\mathrm{d}y \right| \leq \sum_{j=1}^{N} |c_j| \|B\mathbf{1}_{E_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{1}_{F_j}\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} |c_j| \|B\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega),L^\infty(\Omega))} \|\mathbf{1}_{E_j}\|_{L^1(\Omega)} \|\mathbf{1}_{F_j}\|_{L^1(\Omega)} \\ &= \|B\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega),L^\infty(\Omega))} \sum_{j=1}^{N} |c_j||E_j||F_j| = \|B\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega),L^\infty(\Omega))} \|u\|_{L^1(\Omega\times\Omega)}.\end{aligned}$$

Also existiert nach dem Hahn-Banach-Theorem eine Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in (L^1(\Omega\times\Omega))'$ von φ. Da $(L^1(\Omega \times \Omega))' = L^\infty(\Omega \times \Omega)$ gilt, gibt es ein $k \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ mit

$$\|k\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)} = \|\tilde{\varphi}\|_{(L^1(\Omega\times\Omega)')} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega),L^\infty(\Omega))}$$

und

$$\varphi(u) = \int\limits_{\Omega\times\Omega} u(y,x)k(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } u \in \mathcal{F}.$$

Damit haben wir einen Kandidaten für k. Wir zeigen, dass dieses der richtige ist. Seien dazu $f, g \in L^1(\Omega)$ Treppenfunktionen. Dann gilt nach der Definition von φ

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega (Bf)(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(f \otimes g) &= \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega k(x,y)f(y)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_\Omega (B_k f)(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega \big[\Phi(k)f\big](x)g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Da g eine beliebige Treppenfunktion war, haben wir damit $\Phi(k)f = Bf$ für alle Treppenfunktionen f. Damit gilt selbiges nach einem Dichteschluss für alle $f \in L^1(\Omega)$ und wir haben $B = B_k = \Phi(k)$, d.h. Φ ist surjektiv.
Außerdem gilt

$$\|\Phi^{-1}(B)\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)} = \|k\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega,L^\infty(\Omega))},$$

d.h. es gilt auch $\|\Phi^{-1}\| \leq 1$.
Damit bleibt nur noch die Behauptung $B_k \geq 0 \iff k \geq 0$ zu beweisen. Ist $k \geq 0$, so gilt für jedes $f \in L^1(\Omega)_+$ offensichtlich

$$B_k f(x) = \int\limits_\Omega k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \geq 0,$$

also ist $B_k \geq 0$. Sei also nun $B_k \geq 0$. Nehmen wir an es gäbe eine messbare Menge $E \subseteq \Omega \times \Omega$ mit $|E| > 0$ und $k < 0$ auf E, so gibt es messbare

Mengen $E_1, E_2 \subseteq \Omega$, $|E_1|, |E_2| > 0$, $|E_1| < \infty$ und $E_1 \times E_2 \subseteq E$. Dann ist $\mathbf{1}_{E_1} \in L^1(\Omega)_+$ und wie oben erhalten wir

$$(B_k \mathbf{1}_{E_1})(x) = \int\limits_{E_1} k(x,y)\,\mathrm{d}y < 0$$

und damit einen Widerspruch. $\square$

Korollar 1.4. *Es sei $1 \leq p < \infty$ und $B \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ mit $\|Bf\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_1$ für alle $f \in L^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ gegeben. Dann gibt es ein $k \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$, so dass für alle $f \in L^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ gilt*

$$(Bf)(x) = \int\limits_\Omega k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Erfüllt ein Operator die Voraussetzungen von Korollar 1.4, so sagt man, er ist *durch einen L^∞-Kern gegeben* oder er *hat einen L^∞-Kern*.
Ein weiteres erstaunliches und sehr nützliches Resultat folgt aus dem Dunford-Pettis-Theorem, nämlich die folgende Dominationseigenschaft.

Korollar 1.5. *Es sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Weiter seien $B_1, B_2 \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ mit $0 \leq B_1 \leq B_2$ gegeben. Hat nun B_2 einen L^∞-Kern k_2, so hat auch B_1 einen L^∞-Kern k_1 und es gilt $0 \leq k_1 \leq k_2$ fast überall.*

2. Die Wärmeleitungsgleichung in $L^2(\Omega)$

Wir betrachten im folgenden auf einer beliebigen offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^d$ den Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedinungen Δ_Ω^D und mit Neumann-Randbedingungen Δ_Ω^N. Diese definieren wir über

$$D(\Delta_\Omega^D) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta f \in L^2(\Omega) \text{ im schwachen Sinne}\}, \qquad \Delta_\Omega^D f = \Delta f$$

und

$$D(\Delta_\Omega^N) = \left\{ f \in H^1(\Omega) \;\middle|\; \text{es gibt } g \in L^2(\Omega) \text{ mit } -\int\limits_\Omega \nabla f \nabla \varphi = \int\limits_\Omega g\varphi \text{ für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \right\}, \qquad \Delta_\Omega^N f = \Delta f.$$

Für diese Operatoren gilt der folgende Satz, der im Falle von Dirichlet-Randbedingungen in Übung 11 bewiesen wurde. Der Beweis für Neumann-Randbedingungen verläuft analog.

Satz 2.1. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann erzeugen Δ_Ω^D und Δ_Ω^N C_0-Halbgruppen von Kontraktionen auf $L^2(\Omega)$.*

Man beachte, dass wir außer der Offenheit in diesem Satz keinerlei Voraussetzungen an Ω gestellt haben, Ω kann also beispielsweise das Innere der Kochschen Schneeflocke sein. Für diese Allgemeinheit müssen wir natürlich

einen Preis zahlen. Dieser besteht darin, dass wir den Definitionsbereich unserer Operatoren nicht mehr gut kennen, insbesondere gilt im Allgemeinen *nicht* $D(\Delta_\Omega^D), D(\Delta_\Omega^N) \subseteq H^2(\Omega)$!
Wir wollen im Weiteren zeigen, dass die von Δ_Ω^D und Δ_Ω^N erzeugten Halbgruppen durch L^∞-Kerne gegeben sind und diese monoton mit dem Gebiet wachsen.

Notation 2.2. *Sind $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $1 \le p \le \infty$, so betrachten wir im Folgenden $L^p(\Omega_1)$ als Unterraum von $L^p(\Omega_2)$, indem wir jede Funktion $f \in L^p(\Omega_1)$ mit ihrer Fortsetzung durch Null $\tilde{f} \in L^p(\Omega_2)$ identifizieren.*
Ist $B \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_1))$, so fassen wir diesen Operator durch

$$\tilde{B}f := \widetilde{B(f|_{\Omega_1})}, \qquad f \in L^p(\Omega_2),$$

auch als Element von $\mathcal{L}(L^p(\Omega_2))$ auf. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, lassen wir die Tilden weg.

Wir verwenden das folgende Lemma, vgl. Übung 2 (G3).

Lemma 2.3. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann gilt*
- *(a) $f \in H^1(\Omega) \Longrightarrow |f|, f^+, f^- \in H^1(\Omega)$ und $\| \, |f| \, \|_{H^1(\Omega)} = \|f\|_{H^1(\Omega)}$.*
- *(b) $f \in H^1(\Omega) \Longrightarrow D_j f^+ = \mathbf{1}_{f>0} D_j f$ und $D_j f^- = -\mathbf{1}_{f<0} D_j f$ für alle $j = 1, \ldots, d$.*
- *(c) Die Abbildungen $f \mapsto |f|$, $f \mapsto f^+$ und $f \mapsto f^-$ sind stetig von $H^1(\Omega)$ nach $H^1(\Omega)$.*
- *(d) $C_c^\infty(\Omega)_+$ ist dicht in $H_0^1(\Omega)_+$.*
- *(e) Ist $u \in H^1(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(u) \subset\subset \Omega$, so ist $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Lemma 2.4. *Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\lambda > 0$, $u \in H_0^1(\Omega)$ und $0 \le v \in H^1(\Omega)$. Ist dann*

$$\int_\Omega \lambda u \varphi + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \le \int_\Omega \lambda v \varphi + \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)_+, \tag{47}$$

so gilt $u \le v$.

Beweis. Da $C_c^\infty(\Omega)_+$ dicht in $H_0^1(\Omega)_+$ ist (vgl. Lemma 2.3 (d)), gilt (47) mit einem Dichteschluss sogar für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)_+$. Wir zeigen nun, dass die spezielle Funktion $(u-v)^+ \in H_0^1(\Omega)_+$ ist.
Sei dazu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_c^\infty(\Omega)$, die in $H^1(\Omega)$ gegen u konvergiert. Eine solche Folge können wir wählen, da $u \in H_0^1(\Omega)$ ist. Dann gilt

$$\operatorname{supp}\big((u_n - v)^+\big) \subseteq \operatorname{supp}(u_n),$$

da $v \ge 0$ ist. Damit ist auch $\operatorname{supp}((u_n - v)^+)$ kompakt in Ω. Nach Lemma 2.3 (e) ist damit $(u_n - v)^+ \in H_0^1(\Omega)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist nach Lemma 2.3 (c)

$$(u-v)^+ = \lim_{n\to\infty} (u_n - v)^+ \quad \text{ in } H^1(\Omega).$$

Da $H_0^1(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ abgeschlossen ist, haben wir damit $(u-v)^+ \in H_0^1(\Omega)$.

Wir dürfen also in (47) $\varphi = (u-v)^+$ setzen. Damit erhalten wir

$$\lambda \int_\Omega u(u-v)^+ + \int_\Omega \nabla u \nabla (u-v)^+ \leq \lambda \int_\Omega v(u-v)^+ + \int_\Omega \nabla v \nabla (u-v)^+$$

und es gilt mit Lemma 2.3 (b)

$$\begin{aligned}
\lambda \|(u-v)^+\|^2_{L^2(\Omega)} &= \lambda \int_\Omega (u-v)^+(u-v)^+ = \lambda \int_\Omega (u-v)(u-v)^+ \\
&\leq \int_\Omega \nabla(v-u)\nabla(u-v)^+ = -\int_\Omega \nabla(u-v)\nabla((u-v)^+) \\
&= -\int_\Omega \big(\nabla((u-v)^+)\big)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Also muss fast überall $(u-v)^+ = 0$ sein, d.h. $u - v \leq 0$, womit $u \leq v$ f. ü. ist. □

SATZ 2.5. *Für alle $\lambda > 0$ und alle $f \in L^2(\Omega)_+$ gilt*

$$R(\lambda, \Delta_\Omega^D) f \geq 0 \qquad \textit{und} \qquad R(\lambda, \Delta_\Omega^N) f \geq 0.$$

BEWEIS. Im Falle des Dirichlet-Laplace folgt das sofort aus Lemma 2.4 mit $v = 0$ und $u := -R(\lambda, \Delta_\Omega^D) f$, denn dann ist für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)_+$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \lambda u\varphi + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi &= \int_\Omega \lambda u \varphi - \int_\Omega \Delta u \varphi = \int_\Omega (\lambda - \Delta) u \varphi = -\int_\Omega f\varphi \\
&\leq 0 = \int_\Omega \lambda v \varphi + \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi
\end{aligned}$$

und damit $u \leq 0$.
Wir betrachten also noch den Neumann-Laplace. Ist $u := R(\lambda, \Delta_\Omega^N) f$, so gilt

$$\begin{aligned}
-\lambda \|u^-\|^2_{L^2(\Omega)} &= -\lambda(u^- \mid u^-) = (\lambda u \mid u^-) = (\lambda u - \Delta_\Omega^N u \mid u^-) + (\Delta_\Omega^N u \mid u^-) \\
&= (f \mid u^-) + (\Delta_\Omega^N u \mid u^-) \geq (\Delta_\Omega^N u \mid u^-),
\end{aligned}$$

da u^- und f positive Funktionen sind. Nach der Definition des Neumann-Laplace-Operators haben wir weiter

$$-\lambda \|u^-\|^2_{L^2(\Omega)} \geq -\int_\Omega \nabla u \nabla (u^-) = \int_\Omega \nabla(u^-)\nabla(u^-) = \int_\Omega \big(\nabla(u^-)\big)^2 \geq 0,$$

Damit muss $\|u^-\|_{L^2(\Omega} = 0$ sein, d.h. $u^- = 0$ fast überall, was wiederum $u \geq 0$ fast überall bedeutet. □

THEOREM 2.6. *(a) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann gilt für alle $\lambda > 0$ und alle $t \geq 0$*

$$0 \leq R(\lambda, \Delta_\Omega^D) \leq R(\lambda, \Delta_\Omega^N) \qquad \textit{und} \qquad 0 \leq \mathrm{e}^{t\Delta_\Omega^D} \leq \mathrm{e}^{t\Delta_\Omega^N}.$$

(b) *Sind $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, dann gilt für alle $\lambda > 0$ und alle $t \geq 0$*

$$0 \leq R(\lambda, \Delta^D_{\Omega_1}) \leq R(\lambda, \Delta^D_{\Omega_2}) \qquad \textit{und} \qquad 0 \leq \mathrm{e}^{t\Delta^D_{\Omega_1}} \leq \mathrm{e}^{t\Delta^D_{\Omega_2}}.$$

Beweis. **Zu (a):** Es sei $\lambda > 0$ und $f \in L^2(\Omega)_+$. Wir setzen $u := R(\lambda, \Delta^D_\Omega)f$ und $v := R(\lambda, \Delta^N_\Omega)f$. Dann gilt $u \in H^1_0(\Omega)$ und $0 \leq v \in H^1(\Omega)$ nach Definition der Operatoren Δ^D_Ω und Δ^N_Ω, sowie Satz 2.5. Außerdem gilt dann für alle $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)_+$ die Gleichheit

$$\int_\Omega \lambda u\varphi + \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega fv = \int_\Omega \lambda v\varphi + \int_\Omega \nabla v\nabla\varphi.$$

Insbesondere gilt hier also auch „$\leq$“, d.h. wir bekommen mit Lemma 2.4 $u \leq v$ und damit die Behauptung für die Resolventen.
Die entsprechende Ungleichung für die Halbgruppen folgt nun mit Hilfe von Satz 7.2.7. Demnach ist für jedes $f \in L^2(\Omega)$

$$\mathrm{e}^{t\Delta^D_\Omega} f = \lim_{n\to\infty} \tfrac{t}{n} R(\tfrac{t}{n}, \Delta^D_\Omega)^n f.$$

Nun ist nach Satz 2.5 die Funktion $R(\frac{t}{n}, \Delta^D_\Omega)^k f$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ positiv, also gilt

$$R(\tfrac{t}{n}, \Delta^D_\Omega)^n f \leq R(\tfrac{t}{n}, \Delta^N_\Omega) R(\tfrac{t}{n}, \Delta^D_\Omega)^{n-1} f \leq \cdots \leq R(\tfrac{t}{n}, \Delta^N_\Omega)^n f.$$

Das führt auf

$$\mathrm{e}^{t\Delta^D_\Omega} f \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{t}{n} R(\tfrac{t}{n}, \Delta^N_\Omega)^n f = \mathrm{e}^{t\Delta^N_\Omega} f$$

und damit auf die Behauptung.
Zu (b): Es sei $\lambda > 0$, $f \in L^2(\Omega_1)_+$ und $\tilde{f}$ die Fortsetzung von f mit Null nach Ω_2. Dann setzen wir dieses Mal $u := R(\lambda, \Delta^D_{\Omega_1})f$ und $v := R(\lambda, \Delta^D_{\Omega_2})\tilde{f}$. Dann ist $u \in H^1_0(\Omega_1)$ und $v \in H^1_0(\Omega_2)$ mit $v \geq 0$. Insbesondere ist die Einschränkung von v auf Ω_1 in $H^1(\Omega_1)$ und es gilt auch dort $v \geq 0$. Schließlich gilt für alle $\varphi \in C^\infty_c(\Omega_1)_+$ die Gleichung

$$\int_\Omega \lambda u\varphi + \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega fv = \int_\Omega \lambda v\varphi + \int_\Omega \nabla v\nabla\varphi.$$

Insbesondere gilt hier also auch „$\leq$“, d.h. wir bekommen wieder mit Lemma 2.4 $u \leq v$ und damit die Behauptung für die Resolventen.
Die Halbgruppen kann man nun analog zum Beweis in (a) behandeln. □

Setzen wir in Teil (b) dieses Theorems speziell $\Omega_2 = \mathbb{R}^d$, so erhalten wir die folgende Abschätzung durch den Gaußkern.

Korollar 2.7. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann gilt für jedes $t > 0$ und alle $f \in L^2(\Omega)_+$*

$$0 \leq \mathrm{e}^{t\Delta^D_\Omega} f \leq \mathrm{e}^{t\Delta^D_{\mathbb{R}^d}} f = G_t * f,$$

wobei

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$