Partielle Differentialgleichungen I

Matthias Geißert, Robert Haller-Dintelmann, Horst Heck

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einführung in die Problematik

1. Physikalische Motivation

Betrachte einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung. Nun wollen wir untersuchen wie die Wärme geleitet wird.
Annahmen:

- Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0,1]$, $u(t,x) =$ Temperatur in x zum Zeitpunkt t.
- Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Wärmequelle
- Energie in Segment $[x_1, x_2]$: $E(x_2, x_1, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(t, x_1)$
- Wärmeleitungsregel von Fourier: Sei $Q(t,x)$ = die Wärme durch Punkt x zum Zeitpunkt t

$$\frac{Q(t_2,x) - Q(t_1,x)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x) \qquad K_0 \text{ Thermale Konduktivität}$$

- Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} &c\rho(x_2 - x_1)(u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)) \\ &= (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1)\Big(\frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_1) - \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_2)\Big). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_1)}{x_2 - x_1}$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{f(x)}{c\rho} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), \tag{1}$$

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die thermische Diffusivität (eine Konstante) ist.

Stationäre Temperaturverteilung (Gleichgewicht, steady state):

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) \overset{u(t,x)=v(x)}{\Longrightarrow} 0 = f(x) + \Delta v(x) \Longrightarrow \Delta v(x) = -f(x).$$

2. Mathematische Problemstellung

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

Gegeben: Stetige Funktion f auf $\overline{\Omega}$.

Gesucht: Stetige Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, in Ω zweimal differenzierbar mit

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) & = & f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) & = & 0(x) & \forall x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2}$$

Anwendung: Potential eines Ladungsfreies elektrisches Feldes.

u stationäre Temperaturverteilung

BEMERKUNG 2.1. *Δ ist ein linearer Operator $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$.*

Idee: Definiere den Laplace-Operator in geeigneten Räumen und untersuche Abbildungsvorschriften.
Sei z.B. $X := \{h : h \in C^2(\overline{\Omega}),\ h\big|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $Y := C(\overline{\Omega})$ und betrachte $\Delta_{XY} : X \to Y$.
Typische Fragestellungen:

(a) Ist Δ_{XY} injektiv (d.h. die Lösung der Gleichung 2 ist eindeutig, falls sie existiert)
(b) Ist Δ_{XY} surjektiv (d.h. es existiert eine Lösung der Gleichung 2 für alle $f \in Y$).
(c) Finde möglichst einen großen Raum Y so dass Δ_{XY} surjektiv ist (d.h. die Gleichung ist für viele f lösbar).
(d) Da X typischerweise nicht explizit gegeben ist, finde möglichst viele Eigenschaften von X (d.h. Eigenschaften der Lösung).

BEMERKUNG 2.2. *(a) Der Laplace-Operator besitzt keine guten Eigenschaften in $C(\overline{\Omega})$. Suche nach geeigneten Räumen führt auf* Sobolev-Räume *(reflexive Banachräume bzw. Hilberträumen).*

Idee (L_2-Theorie):

(a) Die Existenz einer *schwachen* Lösung lässt sich im Hilbertraumfall (L_2-Theorie) sehr einfach über Lax-Milgram zeigen.
(b) Regularitätstheorie liefert dann eine *starke* bzw. *klassische* Lösung.

BEMERKUNG 2.3. *Eine wichtige Rolle bei der Regularitätstheorie spielt die sogenannte Lokalisierung.*

Idee (L_p-Theorie):

(a) Betrachte zunächst

$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

(b) Benutze die sog. *Fouriertransformation.* Die zentrale Eigenschaft dieser Abbildung ist, dass sie Differentialausdrücke in algebraische umwandelt. Im Fall $(\lambda - \Delta)$ erhält man

$$(\lambda + |\xi|^2)\mathcal{F}u = \mathcal{F}f.$$

Damit ist die formale Inverse von $(\lambda - \Delta)$ durch $u = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}f$ gegeben.

Typische Fragestellungen:

(a) Wie kann man dem formalen Ausdruck $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ als Operator: $Y \to X$ einen Sinn zu geben?
(b) Finde hinreichende Bedinungen, so dass $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ ein beschränkter Operator in L_p ist.

Bemerkung 2.4. *Auf diesem Weg werden wir auch erkennen, dass sich* $T = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ *auch als Integraloperator, d.h.* $Tf(x) = \int k(x,y)f(y)dy$, *darstellen lässt.*

Im letzten Abschnitt betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung (1).
Idee:

(a) Betrachte u als Funktion $t \to u(t,\cdot) \in X$, X ein Funktionenraum (Sobolevraum)
(b) Sei Δ der Laplaceoperator und betrachte

$$\begin{aligned} u'(t) - \Delta u(t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL im Banachraum!
(c) Ana III: Lösung ist $\mathrm{e}^{\Delta t}u_0$.

Typische Fragestellungen

(a) Vernüftige Definition für e^{tA} für große Klassen von (Differential-)operatoren.
(b) Suche Bedingungen an A, so dass e^{tA} wohldefiniert ist

Bemerkung 2.5. *Für spezielle (in Physik und Ingenieurwissenschaften sehr relevante) Klassen von Differentialoperatoren, sog.* Divergenzoperatoren, *lässt sich zeigen, dass* e^{tA} *wieder ein Integraloperator ist (z.B. Laplace auf* beliebigen *offenen Mengen).*

KAPITEL 2

Sobolevräume

1. L_p Räume (Erinnerung)

In diesem Abschnitt sei (M, Σ, μ) stets ein Maßraum.

DEFINITION 1.1.

(a) *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Setze* $\|f\|_p := \Big(\int\limits_M |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$.

(b) *Sei* $f : M \to \mathbb{K}$ *messbar. Dann heißt* f wesentlich beschränkt, *falls ein* $\alpha > 0$ *existiert mit* $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. *Ferner heißt*

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : \ \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\} = 0)\}$$

das wesentliche Supremum von f.

(c) *Sei* $1 \leq p \leq \infty$. *Definiere*

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K}) := \big\{f : f : M \to \mathbb{K} \textit{ messbar und } \|f\|_p < \infty\big\}.$$

BEMERKUNG 1.2.

(a) $\|\cdot\|_p$ *ist eine Halbnorm auf* $\mathcal{L}^p$.

(b) *Sei* $f \in \mathcal{L}^p$. *Dann ist* $\|f\|_p = 0$ *genau dann wenn*

$$f \in \mathcal{N} := \{f : \ \ f \textit{ messbar und } f = 0 \ \mu\textit{-fast überall}\}.$$

(c) $\mathcal{L}^p$ *ist ein Vektorraum.*

(d) $\mathcal{N}$ *ist ein Unterraum von* $\mathcal{M}$, *dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von* $\mathcal{L}^p$*), und*

$$f \sim g \quad \overset{\textit{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation

DEFINITION 1.3. *Der Raum* L^∞ *ist definiert durch:*

$$L^\infty(M, \mu) := \mathcal{L}(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty, \qquad \forall [f] \in L^\infty.$$

SATZ 1.4.

(a) $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ*-fast überall.*

(b) $\|\cdot\|_\infty$ *ist ein Norm.*

(c) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Longrightarrow$ *es existiert ein* $A \in \Sigma$ *mit* $\mu(A^c) = 0$ *und* $f_n \to f$ *gleichmässig auf* A.

(d) $(L^\infty(M, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

DEFINITION 1.5. *Sei* $1 \le p < \infty$

$$L^p(M,\mu) := (M,\Sigma,\mu,\mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \qquad \forall [f] \in L^p.$$

SATZ 1.6 (Höldersche Ungleichung). *Es sei* $1 \le p,q \le \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *(interpretiere* $1/\infty = 0$*). Desweiteren seien* $f \in L^p(M,\mu)$ *und* $g \in L^q(M,\mu)$. *Dann ist* $f \cdot g \in L^1(M,\mu)$ *und*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

PROOF. Die Fälle $p = 1, \infty$ sind trivial. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $f, g \neq 0$. Dann gilt

$$ab \le \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q} \qquad \text{(Youngsche Ungleichung).}$$

(Der Beweis dieser Ungleichung ist elementar.) Natürlich ist fg messbar. Seien $G := g/\|g\|_q$ und $F := f/\|f\|_p$. Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt $x \in M$ ergibt nach Integration

$$\int\limits_M |F(x)G(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \le \int\limits_M \frac{|F(x)|^p}{p}\,\mathrm{d}\mu(x) + \int\limits_M \frac{|G(x)|^q}{q}\,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt. □

SATZ 1.7 (Minkowskische Ungleichung). *Sei* $1 \le p < \infty$ *und* $f, g \in L^p(M,\mu)$. *Dann gilt*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

SATZ 1.8 (Riesz–Fischer). *Sei* $1 \le p < \infty$. *Dann ist* $L^p(M,\mu)$ *vollständig.*

SATZ 1.9. *Nehmen wir an, dass* $f_n \in L^p(M,\mu)$ *gegen* $f \in L^p(M,\mu)$ *konvergiert, dann existiert eine Teilfolge* f_{n_k}, *so dass* $f_{n_k}(x)$ μ*-fast überall konvergiert.*

SATZ 1.10 (Dualität). *Sei* $1 \le p < \infty$, *und* (M,Σ,μ) σ*-endlicher Maßraum. Sei* $1/p + 1/q = 1$ *(so genannte* konjugierte Exponente*). Dann definiert* $L^q(M,\mu) \to L^p(M,\mu)'$

$$J(g)f := \int\limits_M f \cdot g\,\mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^q(M,\mu),\ f \in L^p(M,\mu).,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

PROOF. J ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist J linear. J ist isometrisch, denn sei $g \in L^q(M,\mu)$ und setze

$$f := \frac{\overline{g}}{|g|}\Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^{q/p}.$$

Dann

$$\|f\|_p = \int\limits_M \left(\frac{|\overline{g}|}{|g|}\right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\,\mathrm{d}\mu = 1$$

und $\int_M fg\,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen.

1. Fall $\mu(M) < \infty$*:* Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Betrachte $\nu : \Sigma \to \mathbb{K}$, $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$ ($\chi_A \in L^p(M,\mu)$). ν ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist ν absolut stetig bezüglich μ, denn $A \in \Sigma$ und $\mu(A) = 0$ impliziert $\chi_A = 0$ μ-fast überall, d.h. $\chi_A = 0$ in $L^p(M,\mu)$, also $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$. Satz von Radony–Nikodým ergibt $g \in L^1(M,\mu)$ mit

$$\nu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu = \int_M \chi_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Also wegen Linearität

$$\varphi(f) = \int_M fg \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \text{ Treppenfunktionen } f. \tag{3}$$

Ferner $|\varphi(f)| \leq C'\|f\|_\infty$. Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^\infty(M,\mu)$ also gilt (3) für $f \in L^\infty(M,\mu)$. Wir zeigen nun $g \in L^q(M,\mu)$. Sei erst $q < \infty$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

f ist messbar und $|g|^q = fg = |f|^p$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in M : |f(x)| \leq n\}$. Dann ist $\chi_{A_n} f \in L^\infty(M,\mu)$ und

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_M \chi_{A_n} fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \leq \|\varphi\| \|\chi_{A_n} f\|_p = \\ = \|\varphi\| \Big(\int_{A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} = \|\varphi\| \Big(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \\ \Longrightarrow \quad \left(\int_{A_n} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz von Beppo Levi(monotone Konvergenz) gibt $g \in L^q(M,\mu)$.
Jetzt betrachten wir der Fall $q = \infty$. Dann $|g| \leq \|\varphi\|$, denn sei $A := \{x \in M : |g(x)| > \|\varphi\|\}$. Setze $f := \chi_A |g|/g$, $f \in L^\infty(M,\mu)$. Nehmen wir $\mu(A) > 0$ an.

$$\mu(A)\|\varphi\| < \int_A |g| \,\mathrm{d}\mu = \int_M fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(f) \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme $\Longrightarrow \mu(A) < \|f\|_1$, Widerspruch mit $\mu(A) = \|f\|_1$. Also $g \in L^\infty(M,\mu)$.

Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(M,\mu)$ also $\varphi = Jg$.

2. Fall, $\mu(M) = \infty$*:* Es sei $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ mit $\mu(M_n) < \infty$, und M_n paarweise disjunkt. Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Setze $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$, für $f \in L^p(M_n,\mu_n)$, wobei $\mu_n(A) := \mu(M_n \cap A)$. Dann $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$, insbesondere $\varphi_n \in L^p(M_n,\mu_n)'$. Verwende jetzt den ersten Fall um $g_n \in L^q(M_n,\mu_n)$ zu bekommen. Setze $g := \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ (in jedem Punkt nur ein Summand, g_n wird durch 0 fortgesetzt auf M_n^c). Es ist $g \in L^q(M,\mu)$ und $\varphi = Jg$ zu zeigen. Sei $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$ und f wie in (4)

$$\begin{aligned}\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^n \int_{M_j} fg \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \int_{M_j} \chi_{M_j} f g_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f) \\ &= \varphi(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f) \le \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p \\ &= \|\varphi\| \cdot \Big(\sum_{j=1}^n \int_M |\chi_{M_j} f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \Big(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}} \le \|\varphi\|$, und nach Beppo Levi Theorem $g \in L^q(M,\mu)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \varphi(\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} fg \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_M \chi_{A_n} fg \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int_M fg.\end{aligned}$$

$\square$

Satz 1.11 (L^p Interpolation Ungleichung). *Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(M,\mu) \cap L^{p_1}(M,\mu)$, dann ist $f \in L^{p_\theta}(M,\mu)$ und es gilt*

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Proof. Setze $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$ und $h := |f|^{\theta p_\theta}$. Dann ist $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$, ferner $g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(M,\mu)$ und $h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(M,\mu)$ und

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \le \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. $\square$

Satz 1.12 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung). *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p_i \le \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \dots, m$. Sei ferner $1 \le p \le \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \textit{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_p \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Proof. ÜA. $\square$

Definition und Satz 1.13. *(a) $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) := L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu)$ versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$ ist ein Banachraum.*

(b) Definiere

$$L^1 + L^\infty(M,\mu) := \{f : M \to \mathbb{K} \text{ mb.} : \exists g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu) \text{ mit } f = g+h\}.$$

Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty :\ f = g+h : g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu)\}.$$

ist eine Norm, mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

Satz 1.14. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt $L_p(M,\mu) \subseteq L_1 + L_\infty(M,\mu)$.*

Proof. Der Fall $p = \infty$ ist trivial. Sei $f \in L^p(M,\mu)$. Setze $A := \{x \in M : |f(x)| \ge 1\}$ und $h := \chi_A f$, $g := \chi_{M\setminus A} f$. Dann $g \in L^\infty(M,\mu)$ und $h \in L^1(M,\mu)$, denn

$$\int_M |h|\,\mathrm{d}\mu = \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu \le \int_A |f|^p\,\mathrm{d}\mu \le \int_M |f|^p\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Theorem 1.15 (Riesz–Thorin Konvexitätstheorem). *Sei $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$ linear, ferner seien $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1,\infty]$ mit $p_0 < p_1$ und $r_0 < r_1$. Sei $\alpha \in (0,1)$ und setze*

$$\tfrac{1}{p_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{p_0} + \tfrac{\alpha}{p_1} \qquad \text{und} \quad \tfrac{1}{r_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{r_0} + \tfrac{\alpha}{r_1}.$$

Dann gilt

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_\alpha}, L^{r_\alpha})} \le \|T\|^{1-\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_0}, L^{r_0})} \|T\|^{\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_1}, L^{r_1})}.$$

Zur Beweis benötigen wir folgenden Satz und folgendes Lemma.

Satz 1.16 (Hadamard, 3-Linien Satz). *Sei $a < b$ und $f : \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\} \to \mathbb{C}$ analytisch und beschränkt. Weiter sei*

$$M_a = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(a+it)|, \text{ und } M_b = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(b+it)|.$$

Dann gilt:

$$|f(x+iy)| \le M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}, \quad x + iy \in \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\}.$$

Proof. Wir betrachten $f_\varepsilon(x+iy) = \mathrm{e}^{\varepsilon(x+iy)^2} f(x+iy) M_a^{\frac{x+iy-b}{b-a}} M_b^{\frac{a-(x+iy)}{b-a}}$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt $|f_\varepsilon(a+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon a^2}$ und $|f_\varepsilon(b+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}$ (Beachte: $|a^{iy}| = 1$ für $a > 0$, $y \in \mathbb{R}$). Außerdem gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} \sup_{a\le x\le b} |f_\varepsilon(x+iy)| = 0.$$

Mit dem Maximumprinzip für analytische Funktionen und ein hinreichend großes Rechteck folgt $|f_\varepsilon(z)| \le \max\{\mathrm{e}^{\varepsilon a^2}, \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}\}$. Aus $\varepsilon \to 0^+$ folgt die Behauptung. □

LEMMA 1.17. *Sei $p_0 < p < p_1$ und $f = \sum \alpha_j a_j \chi_{E_j}$ eine Treppenfunktion mit $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $|\alpha_j| = 1$, $a_j > 0$ und $\{E_j\}$ paarweise, disjunkte, mb. Mengen mit (jeweils) endlichem Maß. Weiter sei $\|f\|_p = 1$ und*

$$f_z = \sum \alpha_j a_j^{\frac{p}{p_z}} \chi_{E_j},$$

wobei p_z

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

genügt. Dann gilt:

$$\|f_z\|_{L^{p_{\mathrm{Re}\, z}}} = 1, \quad 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1.$$

PROOF. Es gilt

$$\int |f_z(x)|^{p_{\mathrm{Re}\, z}} d\mu \overset{\text{Ü.A.}}{=} \sum |a_j|^p \mu(E_j) = \|f\|_p^p = 1.$$

□

BEWEIS V. THEOREM 1.15. Sei $p = p_\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ und betrachte Treppenfunktion f und f' auf M, welche $\|f\|_p = \|f'\|_{p'} = 1$ erfüllen. Sei f_z und f_z' wie in Lemma 1.17, wobei f_z mit p_0 und p_1 und f_z' mit r_0 und r_1 konstruiert werden. Nach Voraussetzung ist

$$\Phi(z) := \int_M f_z'(x) T f_z(x) d\mu(x)$$

analytisch in z. Mit der Hölder-Ungleichung und Lemma 1.17 folgt nun:

$$|\Phi(j + iy)| \le \|f_z'\|_{p'} M_j \|f_z\|_p \le M_j, \quad j = 0,1, \ y \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\Phi(j + iy)| \le M_j, \quad j = 0, 1.$$

Damit folgt mit dem 3-Linien Satz, dass

$$|\int f' T f| \le M_0^{1-\alpha} M_1^{\alpha}.$$

Da Treppenfunktionen dicht in $L^{p'}$ sind, erhalten wir $\|Tf\|_p \le M_0^{1-\alpha} M_1^{\alpha}$. Die Behauptung folgt nun, da Treppenfunktionen auch in L^p dicht sind. □

2. L_p Räume II

Im Folgenden sei μ stets das Lebesgue-Maß und Σ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

SATZ 2.1 (Faltung, Youngsche Ungleichung). *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$. Dann gilt*

(a) Für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

(b) Setzt man

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

so ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

PROOF. Sei $p = 1$. Dann gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\text{Tonelli}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Für $p = \infty$ liefert die Hölder-Ungleichung

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y| \leq \|f\|_1\|g\|_\infty,$$

insbesondere existiert $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.
Betrachte nun die Abbildung $T_f g := f * g$. Dann folgt aus dem Riesz–Thorin Konvexitätstheorem, dass $T_f \in \mathscr{L}(L^p, L^p)$ und $\|T_f\|_{\mathscr{L}(L^p,L^p)} \leq \|f\|_1$ für $1 \leq p \leq \infty$, d.h. (b) gilt. Ferner erhalten wir mit Beppo-Levi

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||\chi_{B(0,r)}g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \|f\|_1\|\chi_{B(0,r)}g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p < \infty, \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}^d.$$

□

BEISPIEL 2.2.

(a) Betrachte die partielle Differentialgleichung

$$(1-\Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $f \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(x) = (k * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einem Kern *$k \in L^1$.*

(b) Betrachte

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $u_0 \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(t,x) = (k_t * u_0)(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

mit $k_t \in L^1$ für $t > 0$.

Im Folgenden benötigen wir den Raum der *lokal* integrierbaren Funktionen $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Genauer,

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\text{mb.} : \|f\|_{L^1(K)} < \infty \text{ für alle kp. } K \subset \mathbb{R}^d \right\}.$$

KOROLLAR 2.3. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann definiert die Abbildung $Tf := f * g$ einen stetigen linearen Operator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\|T\| \leq \|f\|_1$.*

SATZ 2.4. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Wegen

$$|(f*g)(x)| = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$.
Sei $x_n \to x$. Wir zeigen $(f*g)(x_n) \to (f*g)(x)$. Setze

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y) \text{ und } F(y) = f(x-y)g(y),$$

dann gilt $F_n(y) \to F(y)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^d$. Anderseits, sei K kompakt so, dass $x_n - \operatorname{supp} f \subseteq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $x_n - y \notin \operatorname{supp} f$ falls $y \notin K$, d.h. $f(x_n - y) = 0$ für $y \notin K$. Daher ist $|F_n(y)| \leq \|f\|_\infty \chi_K(y)|g(y)|$ eine integrierbare Majorante. Nach dem Lebesgueschen Satz folgt $\int F_n\,\mathrm{d}y \to \int F\,\mathrm{d}y$. □

DEFINITION 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und setze*

$$O_f := \Big\{ x \in \Omega : \exists V \subset \Omega \text{ offene Umgebung von } x \text{ mit } f(x) = 0 \text{ für f.a. } x \in V \Big\}$$

Dann heißt $\operatorname{supp} f := \Omega \setminus O_f$ *der* Träger *von f.*

SATZ 2.6. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \tag{5}$$

Proof. Wegen $|(f*g)(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$. Also

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{(x-\operatorname{supp} f)\cap \operatorname{supp} g} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Falls $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, gilt $(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ und $(f*g)(x) = 0$. □

Bemerkung 2.7. *Im Satz 2.6 gilt* $\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

Bemerkung 2.8. *Die obige Aussage* (5) *gilt auch für* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Satz 2.9. *Seien* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. *Dann ist* $f*g \in C^k(\mathbb{R}^d)$, *und* $D^\alpha(f*g) = D^\alpha f * g$. *Insbesondere* $f \in C_c^\infty$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Proof. Wie immer existiert $(f*g)(x)$ für alle x. Sei $e_j \in \mathbb{R}^d$ ein Standardbasisvektor, $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq 1$. Setze $K := \operatorname{supp} f + \overline{B}(0,1)$, dies ist auch kompakt. Dann gilt (Differenzenquotient):

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{h}((f*g)(x+he_j) - (f*g)(x)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{K-x} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

wobei der Integrand gegen $D_j f(x-y)g(y)$ für alle y konvergiert. Außerdem gilt

$$\left|\tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\right| \leq \|D_j f\|_\infty |g(y)| \chi_K(y).$$

Nach dem Satz von Lebesgue (Beachte: $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ bekommen wir $D_j(f*g)(x) = ((D_j f)*g)(x)$, und so die Behauptung. □

Definition 2.10. *Eine Folge* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *von Funktionen mit den Eigenschaften*

(a) $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$
(b) $\rho_n \geq 0$
(c) $\operatorname{supp} \rho_n \subseteq B(0,1/n)$
(d) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$

heißt Mollifier.

Beispiel 2.11. *Betrachte* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq B(0,1)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$, *und definiere* $\rho_n(x) := 1/n^d \rho(nx)$.

Lemma 2.12. *Sei* $f \in C(\mathbb{R}^d)$ *und* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *ein Mollifier. Dann konvergiert* $\rho_n * f \to f$ *gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von* $\mathbb{R}^d$.

PROOF. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x-y) - f(x)| \le \varepsilon$ für $x \in K$ und $|y| \le \delta$. Also

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int\limits_{B(0,1/n)} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y,$$

so für $n > 1/\delta$ gilt $|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \le \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$ für $x \in K$. $\square$

LEMMA 2.13 (Urysohn, C^∞-Version). *Sei $\emptyset \ne \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq \Omega$, K kompakt. Dann existiert ein $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \le \varphi \le 1$ und $\varphi(x) = 1$ für $x \in K$.*

PROOF. Sei $0 < 1/n < \varepsilon < \varepsilon + 1/n < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$. Setze $U_\varepsilon := \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, K) < \varepsilon\} \subseteq \Omega$ und $u = \chi_{U_\varepsilon}$. Dann gilt $\varphi := \rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B}(0, 1/n) + \overline{U}_\varepsilon \subseteq \Omega$, also $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega$ ist kompakt. Sei $x \in K$, dann $\varphi(x) = \int_{|y|\le 1/n} u(x-y)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|y|\le 1/n} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y = 1$. Ferner $\|\varphi\|_\infty \le \|\rho_n\|_1 \cdot \|u\|_\infty = 1$. Da $\varphi \ge 0$ folgt auch $0 \le \varphi \le 1$. $\square$

BEMERKUNG 2.14. *Sei $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann existiert $V \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $\overline{V}$ kompakt und*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega.$$

PROOF. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ wie in Lemma 2.13 und setze

$$V := \{x \in \Omega; \varphi(x) > \frac{1}{2}\}.$$

$\square$

SATZ 2.15. *Sei $1 \le p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
<u>Beh.</u>:$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktion $T = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und $\|T - f\|_p \le \varepsilon$, bekannt aus der Maßtheorie.
<u>Beh.</u>:$\forall \varepsilon > 0\ \exists u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u - \chi_{A_i}\|_p \le \varepsilon$.
Wähle eine offene Menge O und eine kompakte Menge K mit $K \subset A_i \subset O$ und $|O \setminus K| \le \varepsilon$ (Existenz: Maßtheorie). Dann existiert nach Lemma 2.13 ein $\varphi \in C_c^\infty(O)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf K. Es gilt:

$$\int\limits_O |\chi_{A_i} - \varphi|^p = \int\limits_{O\setminus K} |\chi_{A_i} - \varphi|^p \le 2^p |O \setminus K| \le 2^p \varepsilon.$$

$\square$

SATZ 2.16. *Sei $(\rho_n)_{n\ge 1}$ ein Mollifier.*

(a) Sei $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_p \to 0$.
(b) Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_\infty \to 0$

Proof. (a) Nach Satz 2.15 existiert für $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f-g\| \leq \varepsilon$. Satz 2.6 liefert

$$\operatorname{supp}(\rho_n * g) \subseteq \overline{B(0,1/n)} + \operatorname{supp} g \subseteq K, \qquad \text{wobei } K \text{ kompakt.}$$

Da nach Lemma 2.12 $\rho_n * g$ gleichmässig auf K gegen g konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\rho_n * g - g\|_p^p = \int\limits_K |\rho_n * g - g|^p \leq \varepsilon^p |K|.$$

Daraus folgt mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\rho_n * f - f\|_p &\leq \|\rho_n * (f-g)\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \|f-g\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g-f\|_p \leq \varepsilon + \varepsilon |K|^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Wiederhole den Beweis von Lemma 2.12. □

Korollar 2.17. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

Proof. Setze $\Omega_n := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\}$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \Omega_n \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt nach dem Satz von Lebesgue $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$, d.h für $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.
Setze $g_m := \rho_m * f_n$, wobei ρ_m ein Mollifier ist. Dann existiert nach Satz 2.16 ein $m_0 > n_0$ mit $\|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$, $m \geq m_0$. Des Weiteren gilt

$$\operatorname{supp} g_m = \operatorname{supp} \rho_m + \operatorname{supp} f_{n_0} \subset \Omega, \quad m \geq m_0.$$

Damit erhalten wir

$$\|g_m - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\Omega)} + \|f_{n_0} - f\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon, \quad m \geq m_0.$$

□

Satz 2.18 (Zerlegung der Eins). *Seien Ω, $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Seien ferner*

$$K_i \subset \Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset \Omega, \qquad i \in \mathbb{N},$$

mit K_i, $\overline{\Omega}_i$ kompakt und

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i = \Omega,$$

so, dass für alle $x \in \Omega$ eine Umgebung $U(x)$ existiert, welche nur endlich viele Ω_j trifft (diese Überdeckung heißt lokal endlich*). Nehmen wir ferner an, dass $K_j \cap K_i = \emptyset$, falls $i \neq j$.*
Dann existieren $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$, $i \in \mathbb{N}$ mit

(a) $\varphi_i \geq 0$
(b) $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in \Omega$
(c) $\operatorname{supp} \varphi_i \subset \Omega_i$

(d) $0 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i \leq 1$.

Außerdem gilt $\varphi_j(x) = 1$ *für* $x \in K_j$.

PROOF. 1. Schritt: Nehmen wir an dass wir die folgende Situation haben

$$K_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$$

wobei $\overline{V}_j$ kompakt, $U_i \cap K_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ und V_j, U_j sind lokal endliche Überdeckungen von Ω. Wähle φ_j' nach Lemma 2.13 zu U_j und $\overline{V}_j$. Dann gilt $\varphi(x) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i'(x) > 0$, wobei lokal in Ω nur endlich viele Summanden von 0 verschieden sind. Setze $\varphi_j(x) := \varphi_j'(x)/\varphi(x)$. Nach Konstruktion haben die φ_j die gewünschte Eigenschaften.

2. Schritt, Disjunktisierung von Ω_j und K_j: $U_j := \Omega_j \setminus \bigcup_{i\neq j} K_i$. Natürlich gilt $K_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$. Wir behaupten, dass U_j offen ist. Sei $x \in U_j$ und $U(x) \subseteq \Omega_j$ eine Umgebung von x so, dass $J := \{i : \Omega_i \cap U(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Für $j \neq k \in J$ existiert eine Umgebung $W_k(x) \subseteq U(x)$ von x mit $W_k(x) \cap K_k = \emptyset$. Setze $W(x) := \cap_{k\in J} W_k(x)$, die ist eine Umgebung von x mit $W(x) \subseteq U_j$ und $W(x) \cap K_i = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, also U_j ist offen. Sei jetzt $x \in \Omega$, liegt dann $x \in \Omega_j$ für ein j, dann liegt es entweder in U_j oder in K_i für ein $i \neq j$. Die Überdeckung U_j ist lokal endlich, da Ω_j lokal endlich ist.

3. Schritt, Konstruktion von V_j: Sei $V_1 := U_1$. Angenommen V_j, $j < n$ konstruiert ist mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j = \Omega,$$

sei F_n eine abgeschlossene Umgebung von ∂U_n die erfüllt

$$\partial U_n \subseteq F_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Solche eine Umgebung existiert nach Bemerkung 2.14. Falls $U_n \neq 0$, können wir eine kleinere Umgebung $\partial U_n \subseteq F_n' \subseteq F_n$ finden damit $U_n \setminus F_n'$ nichtleer wird. Setze $V_n := U_n \setminus F_n'$. Dann

$$U_n \subseteq V_n \cup F_n' \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Also V_j ist eine offene Überdeckung, die natürlich lokal endlich bleibt. □

SATZ 2.19 (Zerlegung der Eins). *Sei* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *kompakt und* $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, *mit* $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen. Dann existiert* $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$ *mit*

(a) $\varphi_i \geq 0$

(b) $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in K$

(c) $0 \leq \sum_{i=1}^n \varphi_i \leq 1$.

(d) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \Omega_j$

PROOF. Wähle V mit $\overline{V}$ kompakt und

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$$

nach Bemerkung 2.14. Setze $U_i ;= V \cap \Omega_i$ und verwende Satz 2.18 □

BEMERKUNG 2.20. *Das System* $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *heißt* der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins *zu* K.

3. Sobolev Räume I.

In diesem Abschnitt es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

DEFINITION 3.1 (Distributionelle Ableitung). *Sei* $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Falls die Identität*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

gilt, heißT G die distributionelle Ableitung *von* f, *und wir schreiben* $D^\alpha f = g$, $f^{(\alpha)} = g$ *oder* $f = \partial^\alpha g$.

BEMERKUNG 3.2.

(a) *Die distributionelle Ableitung ist eindeutig, insbesondere ist die obige Definition sinnvoll, denn*

$$\int_\Omega (f-g)\varphi = 0 \quad \textit{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f - g = 0 \textit{ fast überall.}$$

(b) *Falls* $f \in C^m(\Omega)$. *Dann für jede* $|\alpha| \leq m$ *ist* $D^\alpha f$ *die klassische partielle Ableitung von* f.

DEFINITION 3.3. *Sei* $m \in \mathbb{N}$ *und* $1 \leq p \leq \infty$. *Definiere*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq m \ \exists D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$
$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

SATZ 3.4. $W^{m,p}(\Omega)$ *ist ein Banachraum.*

PROOF. Klar: normierter Vektorraum. Um die Vollständigkeit zu zeigen, nehme $(f_n) \in W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge, d.h. die Folgen $(D^\alpha f_n) \subseteq L^p(\Omega)$ sind alle Cauchyfolgen. Daher konvergieren die auch, bezeichne die Grenzwerten mit f_α. Wir zeigen nun $D^\alpha f = f_\alpha$:

$$\int_\Omega f_\alpha \varphi \leftarrow \int_\Omega D^\alpha f_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_n D^\alpha \varphi \to (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi.$$

Die Behauptung folgt. □

SATZ 3.5. *Sei* $1 < p < \infty$. *Dann ist* $W^{m,p}(\Omega)$ *separabel und reflexiv.* $W^{m,1}(\Omega)$ *ist separabel.*

PROOF. Definiere die stetige Abbildung

$$J : W^{m,p}(\Omega) \to \underbrace{L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)}_{M} =: X,$$

wobei $M =$ die Anzahl der Multiindizes α mit $|\alpha| \le m$ ist, durch $(Jf)(x) := (D^\alpha f)_{|\alpha|\le m}$. Dann ist J stetig invertierbar, bildet also auf einen abgeschlossenen Unterraum von X ab. Falls $1 \le p < \infty$ ist, ist X separabel, ist zusätzlich $p > 1$, folgt die Reflexivität von X. $\square$

LEMMA 3.6 (Lokale Approximation). *Sei $1 \le p < \infty$, $f \in W^{m,p}(\Omega)$ und $D \subseteq \Omega$ offen mit $\overline{D} \subseteq \Omega$. Betrachte $\delta = \operatorname{dist}(D, \partial\Omega) > 0$ und den Mollifier η_ε, $\varepsilon < \delta$. Setze $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)$. Dann $f_\varepsilon \to f$ in $W^{m,p}(D)$.*

PROOF.

$$\begin{aligned} D^\alpha f_\varepsilon(x) = D^\alpha \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)(x) &= \int_\Omega D^\alpha(\eta_\varepsilon(x-y)) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Träger!}}{=} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (D^\alpha f)_\varepsilon(x), \quad x \in D. \end{aligned}$$

Also $f_\varepsilon \in W^{m,p}(D)$ und nach Satz 2.16 $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha f)_\varepsilon \to D^\alpha f$. $\square$

SATZ 3.7. *Für $1 \le p < \infty$ ist $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$.*

PROOF. Betrachte eine lokal endliche Überdeckung Ω_k von Ω, $\overline{\Omega_k} \subseteq \Omega$ kompakt (siehe Satz 2.18). Sei φ_k Zerlegung der Eins, $\varepsilon > 0$ und $c_k > 0$ später noch zu bestimmen. Für $\varepsilon > 0$ existiert nach Lemma 3.6 $f_{k,\varepsilon} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega_k)$ mit $\|f - f_{k,\varepsilon}\|_{W^{m,p}(\Omega_k} \le c_k \varepsilon$. Setze

$$f_\varepsilon := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k f_{k,\varepsilon}, \text{ also } f_\varepsilon - f := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k (f_{k,\varepsilon} - f)$$

(lokal nur endlich viele Summanden). Die Produktregel gilt, denn für $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi_k f D_i \psi = \int_\Omega (D_i(\varphi_k \psi) - (D_i \varphi_k)\psi) f = -\int_\Omega ((\varphi_k \psi) D_i f + \psi f D_i \varphi_k).$$

Daher ist $\varphi_k f \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$D_i(\varphi_k f) = D_i \varphi_k \cdot f + \varphi_k D_i f.$$

Ferner gilt induktiv auch $\varphi_k f \in W^{m,p}(\Omega)$, und für $|\alpha| \le m$

$$D^\alpha(\varphi_k f) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \varphi_k \cdot D^\beta f.$$

Wir erhalten

$$D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k\in\mathbb{N}} D^{\alpha-\beta} \varphi_k (D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f).$$

$$\begin{aligned}\|D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} &\le C \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} \|D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le C\varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k |\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} \le \varepsilon,\end{aligned}$$

falls $c_k \le 2^{-k}(\|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} + 1)^{-1}/C$. □

SATZ 3.8 (Produktregel). *Sei* $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und* $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $g \in W^{m,q}(\Omega)$. *Dann* $fg \in W^{m,1}(\Omega)$ *und* $D_i(fg) = D_i f \cdot g + f D_i g$.

PROOF. Sei $p < \infty$. Nehme $f_k \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $f_k \to f$. Wir haben gesehen $D_i(f_k g) = D_i f_k \cdot g + f_k D_i g$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega D_i\varphi \cdot fg &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega D_i\varphi \cdot f_k g = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi D_i(f_k g) \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(D_i f_k \cdot g + f_k D_i g) = -\int_\Omega \varphi(D_i f \cdot g + f D_i g).\end{aligned}$$

Der Rest folgt mit Induktion. □

SATZ 3.9 (Kettenregel). *Seien* $\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen, und* $\Phi : \Omega' \to \Omega$ *ein* C^1-*Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen* $D\Phi$, $D\Phi^{-1}$. *Sei* $1 \le p \le \infty$. *Dann gilt für* $f \in W^{1,p}(\Omega)$:

(a) $f \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega')$.
(b) $\partial(f \circ \Phi) = \partial f \circ \Phi \cdot \partial\Phi$.

PROOF. ÜA. □

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\begin{aligned}W_0^{m,p}(\Omega) &:= \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}, \\ W_0^{m,p}(\Omega)_+ &:= \{u \in W_0^{m,p} : u \ge 0 \text{ f.ü.}\}, \\ C_c^\infty(\Omega)_+ &:= \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \varphi \ge 0\}.\end{aligned}$$

und

$$f^+ = \chi_{f>0} f, \; f^- = \chi_{f<0} f, \quad f \in L^p(\Omega).$$

LEMMA 3.10. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen.*

(a) $D_j f^+ = 1_{f>0} D_j f$, $D_j f^- = -1_{f<0} D_j f$ *fuer* $f \in W^{1,2}(\Omega)$
(b) $f \mapsto |f|$, f^+, f_- : $W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)$ *stetig.*
(c) $C_c^\infty(\Omega)_+$ *dicht in* $W_0^{1,2}(\Omega)_+$.
(d) *Sei* $u \in W^{1,2}(\Omega)$, *supp*$(u) \subset\subset \Omega$, *d.h. es existiert ein offenes* $D \subset \Omega$ *mit* $\operatorname{supp} u \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega$. *Dann ist* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

PROOF. Ü.A. □

Satz 3.11. *Sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Interval und $f \in W^{1,1}(I)$. Dann existiert eine Nullmenge N so, dass für $x, y \in I \setminus N$*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

gilt.

Proof. Sei $f \in W^{1,1}(\Omega)$ und $f_k \in C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$ mit $f_k \to f$ in $W^{1,1}(I)$. Dann gilt

$$f_k(y) - f_k(x) = \int_x^y f_k'(z)\,\mathrm{d}z \to \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z.$$

Da f_k in $L^1(I)$ konvergiert, besitzt sie eine punktweis fast überall konvergente Teilfolge, also $\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(z) = f(z)$ für fast alle $z \in I$. □

Satz 3.12. *Sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Interval und $f, g \in L^1(I)$ mit*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{für } x, y \in I \setminus N,$$

für eine Nullmenge N. Dann ist $f \in W^{1,1}(I)$ und $f' = g$.

Proof. Sei $\psi \in C_c^\infty(I)$, und $c, d \in I$ so, dass $\operatorname{supp}\psi \in [c, d]$ und $f(y) - f(c) = \int_c^y g(z)\,\mathrm{d}z$ für fast alle $y \in I$. Dann

$$\begin{aligned}\int_c^d \psi'(y)(f(y) - f(c))\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \int_c^y \psi'(y) g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_x^d \psi'(y)\,\mathrm{d}y g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_c^d \psi(x) g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Satz 3.13. *Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Dann existiert ein $g \in C(\overline{I})$ so, dass $f = g$ fast überall.*

Proof. Sei $I = (a, b)$. Definiere $h(y) := \int_a^y f'(z)\,\mathrm{d}z$. Die Funktion h ist stetig auf I, denn $f' \in L^1(I)$. Außerdem existiert $\lim_{x\to a,b} h(x)$, also $h \in C(\overline{I})$. Seien x, z so, dass $f(z) - f(x) = \int_x^z f'(z)\,\mathrm{d}z$. Sei $c := f(z) - h(z)$ und setze $g(y) := h(y) + c$. Nach Definition $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in I$. □

Bemerkung 3.14. *Die obige Integralgleichung impliziert nicht nur Stetigkeit, sondern auch* Absolutstetigkeit*. Genauer ist Absolutstetigkeit äquivalent zu* (6) *(vgl. Maßtheorie).*

Satz 3.15. *Es sei* $1 \le p \le \infty$ *und* $I = (a,b)$. *Dann sind die Einbettungen* $W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ *stetig. Falls* $p > 1$, *ist die Einbettung* $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ *kompakt.*

Proof. Es ist klar, dass die Einbettungen

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I)$$

stetig sind.
Es bleibt zu zeigen, dass $W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ stetig ist. Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Nach Satz 3.11 existiert eine Nullmenge N mit

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x, y \in I \setminus N.$$

Dann gilt

$$|f(y)| = \Big|f(x) + \int_x^y f'\Big| \le |f(x)| + \int_x^y |f'| \le |f(x)| + \|f'\|_{L^1(I)}.$$

Integration bzgl. x über I liefert

$$(b-a)|f(y)| \le \int_I |f(y)|\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^1(I)} + (b-a)\|f'\|_{L^1(I)}, \quad y \in I \setminus N,$$

d.h. $\|f\|_{L^\infty(I)} \le C\|f\|_{W^{1,1}(I)}$. Da $C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$ dicht in $W^{1,1}(I)$ ist, folgt die Behauptung (Beachte: für $f \in C(\overline{I})$ gilt $\|u\|_{L^\infty(I)} = \|u\|_\infty$).
Nun sei $p > 1$ und $x, y \in I$ mit $x > y$. Dann gilt mit $1/p + 1/p' = 1$

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)|^p &\le \Big(\int_x^y |f'|\Big)^p \overset{\text{Hölder}}{\le} (x-y)^{p/p'} \int_x^y |f'|^p \le (x-y)^{p/p'} \int_a^b |f'|^p \\ &\le (x-y)^{p/p'} \|f\|^p_{W^{1,p}(I)}, \end{aligned}$$

d.h.

$$|f(x) - f(y)| \le (x-y)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{W^{1,p}(I)}, \quad f \in W^{1,p}(I).$$

Also ist $B_{W^{1,p}(I),1}(0) \subset C(I)$ gleichmäßig gleichgradig stetig. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Arzelà–Ascoli. □

4. Sobolev Räume II. – Einbettungssätze

Satz 4.1. *Für* $1 \le p < \infty$ *ist der Raum* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *dicht in* $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

Proof. Seien $\varepsilon > 0$, $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq B(0,2)$ und $\psi(x) = 1$ für $x \in \overline{B(0,1)}$. Setze $\psi_j(x) := \psi(x/j)$.

<u>Beh.</u> $\psi_j f \to f$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.
Die Produktregel (Satz 3.8) liefert

$$|D^\alpha(\psi_j f - f)| \leq C \sum_{\beta \leq \alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)| \cdot |D^{\alpha-\beta} f|,$$

also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha(\psi_j f - f)|^p &\leq C' \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\beta \leq \alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&= C' \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&\quad + C' \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&= C' \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&\leq C'' \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,j)} |D^{\alpha-\beta} f|^p \leq \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

falls j groß genug ist.
Nun betrachten wir einen Mollifier (ρ_n). Dann hat $\rho_n * \psi_j f$ kompakten Träger und ist glatt. Nach Satz 2.9 und 2.16 gilt $D^\alpha(\rho_n * (\psi_j f)) = \rho_n * D^\alpha(\psi_j f) \to D^\alpha \psi_j f$ für $n \to \infty$. Sei also erst j groß und dann n genügend groß, so dass

$$\|f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f - \psi_j f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \|\psi_j f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

□

Satz 4.2. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

mit stetiger Einbettung, d.h. für eine Konstante C_p

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Proof. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $1 \leq p < \infty$. Setze $G(s) := |s|^{p-1} s$. Dann gilt $\psi := G(\varphi) \in C_c^1(\mathbb{R})$ und $\psi' = G'(\varphi)\varphi' = p|\varphi|^{p-1}\varphi'$. Also erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$

$$G(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|\varphi(t)|^{p-1} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nach der Hölderschen Ungleichung folgt

$$|G(\varphi(x))| = |\varphi(x)|^p \leq p \|\varphi\|_p^{p-1} \|\varphi'\|_p$$

und

$$|\varphi(x)| \leq C \|\varphi\|_p^{(p-1)/p} \|\varphi\|_p^{1/p}.$$

Die Youngsche Ungleichung liefert

$$|\varphi(x)| \le C\tfrac{p-1}{p}\|\varphi\|_p + C\tfrac{1}{p}\|\varphi'\|_p \le C\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}. \tag{7}$$

Sei nun $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Nach Satz 4.1 existiert $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Mit (7) ist dann u_n eine Cauchyfolge in $L^\infty(\mathbb{R})$ und die Behauptung folgt. □

Lemma 4.3. *Sei $d \ge 2$ und $f_1, \dots, f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $1 \le i \le d$ setze*

$$\widetilde{x}_i := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$$

und sei

$$f(x) = f_1(\widetilde{x}_1) f_2(\widetilde{x}_2) \cdots f_n(\widetilde{x}_d) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Proof. Ü.A. □

Theorem 4.4 (Sobolev). *Sei $1 \le p < d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^d), \qquad \text{mit } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$$

stetig und es existiert $C = C_{p,d}$ mit

$$\|f\|_{L^{p^*}} \le C\|\nabla f\|_{L^p} \qquad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Proof. *1. Schritt:* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$.
Sei $1 \le i \le d$.

$$\begin{aligned} |u(x_1, x_2, \dots, x_d)| &= \Big| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d)\,\mathrm{d}t \Big| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) \Big|\,\mathrm{d}t \\ &:= f_i(\tilde{x}_i). \end{aligned}$$

Also $\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{d-1})} \le \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.
Es gilt $|u(x)|^d \le \prod_{i=1}^d |f_i(\widetilde{x}_i)|$. Mit Lemma 4.3 folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}}\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d |f_i(\widetilde{x}_i)|^{\frac{1}{d-1}}\,\mathrm{d}x \le \prod_{i=1}^d \|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d-1}}.$$

Das heißt

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^{d} \left\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}}. \tag{8}$$

Wir wenden (8) auf $|u|^t$, $t > 1$ anstatt auf u an. Also, mit $1/p + 1/p' = 1$

$$\begin{aligned}
\|u\|^t_{L^{\frac{td}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{td}{d-1}}(x)\, \mathrm{d}x \Big)^{\frac{d-1}{d}} \leq \prod_{i=1}^{d} \left\| t|u|^{t-1} \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \\
&\leq t \prod_{i=1}^{d} \left\| |u|^{t-1} \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \leq t \|u\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^d)} \prod_{i=1}^{d} \left\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}}.
\end{aligned}$$

Wähle nun t so dass $\frac{td}{d-1} = p'(t-1)$, d.h. $t = \frac{d-1}{d} p^*$ (dann $t \geq 1$). Jetzt durch dividieren durch $\|u\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^d)}$ bekommen wir

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq t \prod_{i=1}^{d} \left\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

die Behauptung für $u \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$.

2. Schritt: Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 4.1 wähle $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. Dies zeigt auch dass u_k eine Cauchyfolge in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ ist, deshalb ist sie konvergent. Eine Teilfolge konvergiert dann fast überall, benutzen wir die selbe Bezeichnung $u_k(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$. Also $u_k \to u$ in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$, und $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. □

Bemerkung 4.5. *Es genügt $C_{p,d} := \frac{(d-1)p}{d-p}$. Die optimale Konstante ist bekannt aber kompliziert.*

Satz 4.6. *Sei $1 \leq p < d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d), \qquad r \in [p, p^*]$$

stetig.

Proof. Sei $p \leq r \leq p^*$. Für ein θ gilt $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Verwende dann die Interpolationsungleichung, die Youngsche Ungleichung und Theorem 4.4

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} &\leq \|u\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|u\|^{1-\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \theta \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + (1-\theta) \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C' \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

□

Theorem 4.7 (Morrey). *Es sei $p > d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

stetig. Ferner existiert ein $C := C_{d,p}$ so, dass für alle $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\theta \|\nabla f\|_{L^p} \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $\theta = 1 - \frac{d}{p}$.

Proof. *1. Schritt:* Sei $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Sei Q ein abgeschlossener Würfel $0 \in Q$ mit Seitenlänge r. Sei $x \in Q$, dann $u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx)\,\mathrm{d}t$. Daraus

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^d \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| |x_i| \,\mathrm{d}t \leq r \sum_{i=1}^d \int_0^1 \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t.$$

Sei $\bar{u} = |Q|^{-1} \int_Q u(x)\,\mathrm{d}x$. Dann $|\bar{u} - u(0)| \leq |Q|^{-1} \int_Q |u(x) - u(0)|$, und

$$\begin{aligned}
|\bar{u} - u(0)| &\leq \tfrac{r}{|Q|} \int_Q \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \tfrac{r}{r^d} \int_0^1 \int_Q \sum_{i=1}^d \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{r^{d-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^d \int_{tQ} \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \mathrm{d}y \cdot \tfrac{1}{t^d}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \tfrac{1}{r^{d-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^d \Big(\int_Q \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right|^p \mathrm{d}y\Big)^{1/p} |tQ|^{1/q} \cdot \tfrac{1}{t^d}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \tfrac{1}{r^{d-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{d/q} \int_0^1 \tfrac{t^{d/q}}{t^d}\,\mathrm{d}t = \tfrac{r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}.
\end{aligned}$$

Natürlich können wir das ganze für x anstatt für 0 wiederholen und auch Q verschieben, also

$$|\bar{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \text{für } x \in Q. \tag{9}$$

Daraus

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - \bar{u}| + |\bar{u} - u(y)| \leq \frac{2r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \text{für } x, y \in Q.$$

Sei nun $x, y \in \mathbb{R}^d$. Es existiert ein Würfel Q der Seitenlänge $r = 2|x-y|$ mit $x, y \in Q$.

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{C|x-y|^\theta}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

2. Schritt: Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Approximiere mit $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Wie im Beweis von Theorem 4.4 folgt

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{C|x-y|^\theta}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

3. Schritt: Wir zeigen $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sei $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $Q \ni x$ der Einheitswürfel. Aus (9) folgt

$$|u(x)| \leq |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq \|u\|_{L^p(Q)} + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq C_{d,p}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Schließlich approximiere $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ mit $u_k \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. □

SATZ 4.8 (Der Fall $p = d$). *Die Einbettung*

$$W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d), \qquad q \in [d, \infty)$$

ist stetig.

PROOF. Ohne Beweis. □

KOROLLAR 4.9. *Sei $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1$) und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$
(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ *für alle* $r \in [p, \infty)$ $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$
(c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) *Sei* $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. *Setze*

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \textit{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1$$

$\Longrightarrow$ *für jede* $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ *es existiert* C *mit*

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{W^{m,p}} \qquad \forall |\alpha| \leq k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta \qquad \textit{fast alle } x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| = k.$$

Insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^d)$$

mit stetiger Einbettung.

PROOF. ÜA. □

5. Sobolev Räume III. - Gebiete

NOTATION 5.1. *Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann $x = (x', x_d)$ mit $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $x' = (x_1, \ldots, x_{d-1})$. Wir setzen*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d_+ &:= \{x = (x', x_d) :\ x_d > 0\} \\ Q &:= \{x = (x', x_d) :\ |x'| < 1 \textit{ und } |x_d| < 1\} \\ Q_+ &:= Q \cap \mathbb{R}^d_+ \\ Q_0 &:= \{x = (x', x_d) :\ |x'| < 1 \textit{ und } x_d = 0\} \end{aligned}$$

DEFINITION 5.2. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann heißt Ω* von der Klasse C^m, *falls eine lokal endliche Überdeckung $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ des Randes $\partial\Omega$ und bijektive Abbildungen $\Phi_j : Q \to U_j$ existieren, so dass Φ_j, Φ_j^{-1} m-fach stetig differenzierbar mit* gleichmäßig *beschränkten Ableitungen sind und $\Phi_j(Q_+) = U_j \cap \Omega$ und $\Phi_j(Q_0) = U_j \cap \partial\Omega$ gelten.*

Satz 5.3 (Fortsetzungsoperator). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und von der Klasse C^m oder $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. Dann existiert für $1 \leq p \leq \infty$ ein linearer Operator $F : L^p(\Omega) \to L^p(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $k \leq m$ gilt*

(a) $Fu\big|_\Omega = u$,

(b) $\|Fu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C_\Omega \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Beweisidee für $m = 1$ und Ω beschränkt: Nach Voraussetzung kann man $\overline{\Omega}$ mit $U_0 = \Omega$ und endlich vielen U_l überdecken. Die zugehörigen bijektiven Abbildungen bezeichnen wir wieder mit Φ_l. Betrachte eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins (φ_l). Die Funktionen $\varphi_l f$ (eingeschränkt auf $\Omega \cap U_l$) liegen in $W^{1,p}(\Omega \cap U_l)$. Sei einfach

$$\tilde{f}_0(x) := \begin{cases} g_0(x) & x \in U_0 \\ 0 & x \notin U_0 \end{cases}.$$

Für $l > 0$ definiere $g_l := (\varphi_l f) \circ \Phi_l$. Dann gehört g_l zu $W^{1,p}(Q_+)$ nach Satz 3.9. Setze g_l, $l > 0$ auf Q so fort:

$$\tilde{g}_l((x', x_d)) := \begin{cases} g_l((x', x_d)) & (x', x_d) \in Q_+ \\ g_l((x', -x_d)) & (x', x_d) \notin Q_+ \cup Q_0. \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{g}_l \in W^{1,p}(Q)$ und $\|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C\|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}$ (dies ist noch zu beweisen!). Jetzt sei $\tilde{f}_l := \tilde{g}_l \circ \Phi_l^{-1}$. Dann gilt $\tilde{f}_l\big|_{\Omega \cap U_l} = (\varphi_l f)\big|_{\Omega \cap U_l}$ und $\tilde{f}_l$ ist null außerhalb von $\Phi_l^{-1}(Q)$. Betrachte jedes $\tilde{f}_l$ als eine Funktion definiert auf $\mathbb{R}^d$ (0 außerhalb U_l). Dann $\tilde{f}_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, also liegt die Funktion

$$\tilde{f} = \sum_{l=0}^{N} \tilde{f}_l$$

auch in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und sie ist eine Fortsetzung von f (nach Konstruktion). Die folgenden Abschätzungen gelten für $l > 0$:

$$\begin{aligned} \|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} &\leq C\|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(\Omega\cap U_l)}, & \|g_l\|_{L^p(Q_+)} &\leq C\|\varphi_l f\|_{L^p(\Omega\cap U_l)} \\ \|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} &\leq C\|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}, & \|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)} &\leq C\|g_l\|_{L^p(Q_+)} \\ \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} &\leq C\|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)}, & \|\tilde{f}_l\|_{L^p(U_l)} &\leq C\|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante C nur von Ω, von der Überdeckung und von den zugehörigen Funktionen Φ_l abhängt. Also

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} &\leq \sum_{l=0}^{N} \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \sum_{l=0}^{N} \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} \leq C' \sum_{l=0}^{N} \|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(U_l \cap \Omega)} \\ &\leq C''\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Analog folgt die Abschätzung im Fall $k = 0$. □

SATZ 5.4 (Dichtheit). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und von der Klasse C^m. Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ wobei $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Folge $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_n\big|_\Omega \to u$ in $W^{m,p}(\Omega)$, d.h. die Menge*

$$\left\{u\big|_\Omega : \, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\right\}$$

ist ein dichter Unterraum von $W^{m,p}(\Omega)$.

PROOF. Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ und betrachte Fu. Satz 4.1 liefert eine Folge $(v_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - Fu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Die Folge $u_n := v_n\big|_\Omega$ hat die gewünschten Eigenschaften. □

KOROLLAR 5.5. *Sei $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1$), $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt von der Klasse C^m oder $\Omega = \mathbb{R}^d_+$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gelten die folgende Aussagen*

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$,

(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *für alle* $r \in [d, \infty)$,

(c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. Setze

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k, \; 0 < \theta < 1$$

$\Longrightarrow$ für jede $f \in W^{m,p}(\Omega)$. Dann existiert C mit

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad \text{für alle } |\alpha| \leq k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}|x-y|^\theta \quad \text{für fast alle } x, y \in \Omega, \; |\alpha| = k.$$

Insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$$

mit stetiger Einbettung.

PROOF. Ü.A. □

SATZ 5.6 (Charakterisierungen von Sobolev Funktionen). *Es sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$. Äquivalent sind*

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$

(b) Es existiert $C > 0$

$$\Big|\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\Big| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}, \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \; i = 1, \dots, d.$$

(c) Es existiert ein $C > 0$, so dass für jedes $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$ gilt

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} \leq C|h|.$$

BEMERKUNG 5.7. *Es kann $C = \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$ gewählt werden.*

Falls $p = 1$, so gilt (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)

PROOF. ÜA. $\square$

SATZ 5.8. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $1 \leq p < \infty$ und $M \subseteq L^p(\Omega)$ beschränkt. Es gelte*

(a) für alle $\varepsilon > 0$ und $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ existiert ein $0 < \delta < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$ mit

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^d \text{ mit } |h| < \delta \text{ und für alle } f \in M,$$

wobei $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$.

(b) für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\Omega' \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega'}$ kompakt in Ω, so dass

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in M.$$

Dann ist M relativ kompakt in $L^p(\Omega)$.

PROOF. (Skizze). Wir betrachten zunächst den Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$. Nach Voraussetzung (b) können wir $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'}$ kompakt in Ω wählen, so dass ein $C > 0$ mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} \leq C\varepsilon, \quad f \in M. \tag{10}$$

existiert. Sei η_n ein Mollifier und $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\|\eta_n * \Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{h \in B(0,\varepsilon)} \|\tau_h \Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,. \tag{11}$$

Da $C_c(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist, existiert für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ eine Folge $(\Phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{j\to\infty} \Phi_j = f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n * \Phi_j = \eta_n * f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d),$$
$$\lim_{j\to\infty} \tau_h \Phi_j = \tau_h f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

Damit folgt aus (11) und (a), dass

$$\lim_{n\to\infty} \|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} = 0$$

gleichmäßig für alle $f \in M$, d.h. es existiert ein $C > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} < C\varepsilon, \quad f \in M. \tag{12}$$

Wegen $\eta_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt insbesondere $\eta_n * f \in C(\overline{\Omega'})$. Mit Arzela-Ascoli folgt nun, dass

$$M' = \{\eta_n * f : f \in M\}$$

relativ kompakt ist.
Somit existieren nach (Adams, Sobolev Spaces) Theorem 1.19 (*Total beschränkt*) eine endliche Menge von Funktionen $\{\psi_1, \dots, \psi_m\} \subset C(\overline{\Omega'})$ mit

$$M' \subset \bigcup_{i=1}^n B(\psi_i, \varepsilon).$$

Daher existiert ein $C > 0$, so dass für $f \in M$ ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$|\psi_j(x) - (\eta_n * f)(x)| < C\varepsilon, \quad x \in \overline{\Omega'} \tag{13}$$

existiert. Bezeichne die Erweiterung mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ von ψ mit $\tilde{\psi}$. Dann folgt aus (10), (11), (12) und (13), dass

$$\|f - \tilde{\psi}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

für ein $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt, d.h.

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(\tilde{\psi}_i, \varepsilon).$$

Daher ist M relativ kompakt.
Der allgemeine Fall folgt aus dem Spezialfall, wenn man die Menge $\tilde{M} = \{\tilde{f} : f \in M\}$, wobei $\tilde{f}$ die Erweiterung mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ von f bezeichnet, betrachtet. (s. Adams, Sobolev Spaces, Theorem 2.32) □

THEOREM 5.9 (Rellich). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt der Klasse C^1. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) $p < d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $r \in [1, p^*)$, wobei $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$ erfüllt ist;

(b) $p = d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $r \in [1, \infty)$;

(c) $p > d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$

jeweils mit kompakter Einbettung.

PROOF. (a) Sei B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir verwenden Satz 5.8. Sei $1 \leq r < p^*$. Dann existiert ein $\theta \in (0, 1]$ mit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Sei $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$. Die Interpolationsungleichung 1.11 und 5.6 liefern

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^r(\Omega')} &\leq \|\tau_h u - u\|^{\alpha}_{L^1(\Omega')} \|\tau_h u - u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\Omega')} \\
&\leq |h|^{\alpha} \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^1(\Omega)} (2\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \\
&\leq C|h|^{\alpha} \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C|h|^{\alpha},
\end{aligned}$$

falls $u \in B$. Ferner gilt für solche u

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^r(\Omega \setminus \Omega')} &= \Big(\int_{\Omega \setminus \Omega'} |u(x)|^r \, \mathrm{d}x \Big)^{1/r} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \Omega')} |\Omega \setminus \Omega'|^{1 - r/p^*} \\
&\leq |\Omega \setminus \Omega'|^{1 - r/p^*} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

falls Ω' geeignet gewählt ist.
(b) Analog.
(c) Sei $p > d$. Sei B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\Omega)$. Es ist zu zeigen, dass B relativ kompakt in $C(\overline{\Omega})$ ist. Korollar 5.5 liefert

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha} \qquad \forall f \in B,$$

mit $\alpha > 0$, d.h. B ist gleichmäßig gleichgradig stetig. Der Satz von Arzelà–Ascoli liefert die Behauptung.

$\square$

SATZ 5.10 (Poincaré Ungleichung). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann existiert $C_\Omega > 0$ mit*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{für alle } f \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

PROOF. Sei $f \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\Omega \subseteq [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, und definiere $f = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned} |f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_d)|^p &= |f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_d) - f(x_1, \ldots, a_i, \ldots x_d)|^p \\ &= \Big| \int_{a_i}^{x_i} \partial_i f(x_1, \ldots, y_i, \ldots x_d) \Big|^p \,\mathrm{d}y_i \\ &\leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{x_i} |\partial_i f|^p \leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i f|^p. \end{aligned}$$

Daher

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (b_i - a_i)^{p/p'} (b_i - a_i) \|\partial_i f\|_{L^p(\Omega)}^p = (b_i - a_i)^p \|\partial_i f\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Da $(\sum_{i=1}^d |\partial_i f|^p)^{1/p} \leq M |\nabla f|$, so erhalten wir die gewünschte Ungleichung. $\square$

SATZ 5.11 (Einbettungssätze für $W_0^{1,p}(\Omega)$). *Die obigen Einbettungssätze gelten auch für $W_0^{1,p}$-Räume.*

PROOF. Klar, da $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

BEMERKUNG 5.12 (Vektorwertige Sobolev-Räume). *Sei $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir definieren*

$$W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{f = (f_1, \ldots, f_m) : f_i \in W^{k,p}(\Omega),\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Dann gelten die Sätze für $W^{k,p}(\Omega)$ auch für vektorwertige Sobolev-Räume.

PROOF. Sätze komponentenweise anwenden. $\square$

6. Sobolev Räume IV. Spuroperatoren

SATZ 6.1 (Spursatz (Halbraum)). *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} : W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \to L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ mit*

$$\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u = u|_{\partial \mathbb{R}^d_+}, \quad u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+}).$$

PROOF. Ü.A. $\square$

SATZ 6.2. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:*

$$u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \Leftrightarrow \Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u = 0, \quad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

PROOF. Die Richtung von links nach rechts ist klar. Sei nun $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ mit $\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u = 0$ und $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$. Wir bezeichnen die Fortsetzung von u mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ mit $\tilde{u}$ und zeigen, dass $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ liegt, wobei $D^\alpha \tilde{u}$ die Fortsetzung von $D^\alpha u$ mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \tilde{u}\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} D^\alpha u\varphi = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} D^\alpha u_n\varphi \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(- \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} u_n D^\alpha \varphi + \int\limits_{\partial\mathbb{R}^d_+} u_n\varphi \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} u_n D^\alpha \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} u D^\alpha \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{u} D^\alpha \varphi, \\
&\quad |\alpha| \le 1, \ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),
\end{aligned}$$

da

$$\left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^d_+} u_n\varphi \right| \le \|\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d-1})} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Daher liegt $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Da $h \mapsto T_{\vec{h}} u$ (vgl. 1. Übungsblatt) für $\vec{h} = (0,0,0,\dots,h)$ eine stetige Abbildung mit Werten in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ist, folgt die Behauptung nach Lemma 3.10 (d). □

SATZ 6.3 (Spursatz). *Sei $1 \le p < \infty$ und $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^d_+$ beschränkt und von der Klasse C^1. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ mit*

$$\Gamma_\Omega u = u|_{\partial\Omega}, \quad u \in C_c^\infty(\overline{\Omega}).$$

PROOF. Nach Voraussetzung existiert eine Überdeckung U_j des Randes von Ω. Wir bezeichnen wieder die zugehörigen Diffeomorphismen mit Φ_j. Weiter sei φ_j eine der Überdeckung U_j untergeordnete Zerlegung der Eins und $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \le \psi_j \le 1$ und $\operatorname{supp} \varphi_j \subset\subset \{\psi_j \equiv 1\}$. Wir definieren

$$\Gamma_\Omega u := \sum \varphi_j (\Gamma_{\mathbb{R}^d_+}(\psi_j u) \circ \Phi_j) \circ \Phi_j^{-1}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_\Omega u)(x) &= \sum \varphi_j(x) (\Gamma_{\mathbb{R}^d_+}(\psi_j u) \circ \Phi_j) \circ \Phi_j^{-1}(x) \\
&= \sum \varphi_j(x) ((\psi_j u) \circ \Phi_j) \circ \Phi_j^{-1}(x) = \sum \varphi_j(x) (\psi_j u)(x) \\
&= u(x), \quad x \in \partial\Omega, \ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).
\end{aligned}$$

□

SATZ 6.4. *Sei* $1 \le p < \infty$, $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^d$ *und von der Klasse* C^1. *Dann gilt:*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \Gamma_\Omega u = 0, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

PROOF. Ü.A. Lokalisierung unter Verwendung von Satz 6.2. □

BEMERKUNG 6.5. *Es stellt sich die Frage, ob die Abbildung* $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ *surjektiv ist, d.h. kann jede* L^p*-Funktion auf dem Rand ins Innere fortgesetzt werden?*

Antwort: *Nein, man kann aber zeigen, dass* $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ *für* $1 < p < \infty$ *surjektiv ist. Hier:*

$$W^{s,p}(\partial\Omega) := \left\{ u \in L^p(\partial\Omega) : \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty \right\}, \quad s \in (0,1).$$

KAPITEL 3

Elliptische Randwertproblem in L^2

1. Elliptische Randwertprobleme

NOTATION 1.1. *Die Sobolevräume werden im Falle* $p = 2$ *mit* $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ *bzw. mit* $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ *bezeichnet.*

BEMERKUNG 1.2. *Die Räume* H^m *und* H_0^m *sind Hilberträume mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle := \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega D_\alpha f \overline{D_\alpha g}.$$

Insbesondere sind sie reflexiv. Die Norm ist hier gegeben durch das Skalarprodukt

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} := \langle f, f\rangle^{1/2} := \Big(\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \left|D_\alpha f\right|^2\Big)^{1/2},$$

welches zu der $W^{m,2}$*-Norm äquivalent ist.*

Im Folgenden nehmen wir stillschweigend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ an, aber natürlich gelten die Resultate auch im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

LEMMA 1.3. *Sei* $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen, beschränkt und von der Klasse* C^1. *Sei* $(u_n) \subseteq H^1(\Omega)$ *schwach konvergent gegen ein* u. *Dann konvergiert* u_n *in* $L^2(\Omega)$ *gegen* u.

PROOF. Die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt (siehe Theorem 5.9). Nehmen wir an, dass eine Teilfolge u_{n_k} existiert mit $\|u_{n_k} - u\|_{L^2(\Omega)} \geq \varepsilon$ für ein festes $\varepsilon > 0$ und für alle n_k. Diese Teilfolge wird auch mit u_n bezeichnet. Da (u_n) beschränkt in $H^1(\Omega)$ ist, hat es eine $L^2(\Omega)$-konvergente Teilfolge $u_{n_k} \to u'$. Aber $u_{n_k} \to u$ schwach in $H^1(\Omega)$ also auch schwach in $L^2(\Omega)$, was zu dem Widerspruch $u' = u$ führt. □

BEMERKUNG 1.4. *Natürlich gilt das obige Resultat für* $W^{1,p}$ *Räumei, so lange* $1 < p < \infty$ *ist.*

1.1. Elliptische Gleichungen 2. Ordnung mit Dirichlet Randbedingungen.

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien $a_{ji} = a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq d$ und $a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $a_0(x) \geq 0$ für jedes $x \in \Omega$. Wir setzen im Folgenden die sogenannte *Elliptizitätsbedingung* voraus:

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > \alpha|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $\alpha > 0$, d.h. die Matrix mit den Einträgen (a_{ij}) ist positiv definit.

PROBLEM 1.5 (Dirichlet-Randbedingung). *Finde* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big) + a_0 u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Klassische Lösung: Eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, welche (P) erfüllt.

Schwache Lösung: Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\text{(SP)} \qquad +\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Schritt 1: Klassische Lösungen sind auch schwache Lösungen
Falls $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt auch $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Da $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, liegt u in $H_0^1(\Omega)$. Multiplikation mit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ und partielle Integration liefern (SP) für $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Der Dichtesatz 3.7 gibt (P) für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.
Schritt 2: Existenz von schwachen Lösungen
Seien nun $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ des schwachen Problems (SP), mit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer von f unabhängigen Konstanten C.

PROOF. Setze

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv, \\ b(v) &:= \int_\Omega fv, \qquad v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Dann ist a eine stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C'\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass das lineare Funktional b stetig ist. Die Bilinearform a ist auch koerziv, denn

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int\limits_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u^2 \Big) \overset{\text{ellipt.}}{\geq} \int\limits_\Omega \alpha |\nabla u|^2 + a_0 \int\limits_\Omega |u|^2 \\
&\geq \alpha \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \alpha \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + (\alpha - \varepsilon) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\overset{\text{Poincaré}}{\geq} \varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \tfrac{(\alpha-\varepsilon)}{C_\Omega^2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \Big(\tfrac{\alpha}{C_\Omega^2} - \varepsilon \Big(1 + \tfrac{1}{C_\Omega^2} \Big) \Big) \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ folgt die Koerzivität von a, d.h $a(u,u) \geq \varepsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, $u \in H_0^1(\Omega)$. Verwendung vom Lax–Milgram Lemma liefert die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung (vgl. ÜA).

Die schwache Lösung u erfüllt

$$\|u\|^2_{H_0^1} \leq \frac{1}{\varepsilon} a(u,u) = \frac{1}{\varepsilon} b(u) = \int\limits_\Omega fu \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dies zeigt $\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}$, also die gewünschte Normabschätzung. □

Schritt 3: Regularität der Lösung
Seien $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ für alle $x \in \Omega$ und Ω offen, beschränkt, von der Klasse C^2. Sei $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von (P). Dann gilt

(a) $u \in H^2(\Omega)$ und $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$.
(b) Ist $f \in H^m(\Omega)$ und $\partial\Omega$ der Klasse $C^{m+2} \implies u \in H^{m+2}(\Omega)$ und $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}$.

Proof. Siehe Kapitel 2. □

Korollar 1.6. *Sei $f \in H^m(\Omega)$ und $u \in H^{m+2}(\Omega)$ die schwache Lösung von* (P). *Die Sobolevschen Einbettungsätze 4.9 geben $W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega)$, falls $l > 2 + d/p$. Für $p = 2$ und $m > d/2$ gilt $u \in H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$.*

Schritt 4: Rückkehr zur klassischen Lösung
Sei $f \in H^m(\Omega)$ mit $m > d/2$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$. Ferner partielle Integration und Dichtheitsargument liefern die Existenz klassischer Lösungen.

2. L^2-Regularitätstheorie

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien $a_{ji} = a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq d$ und b_i, $a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq d$. Wir setzen die Elliptizitätsbedingung voraus. Wir untersuchen zunächst die Regularität von Lösungen der folgenden

Gleichung für $f \in L^2(\Omega)$.

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \partial_j\big(a_{ij}\partial_i u\big) + \sum_{i=1}^{d} b_i\partial_i u + a_0 u = f \quad \text{in } \Omega. \tag{14}$$

Theorem 2.1 (Innere Regularität). *Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von* (14). *Dann ist $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ und für $V \subset\subset \Omega$ gilt:*

$$\|u\|_{H^2(V)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von Ω, V und a_{ij}, b_i und a_0 abhängt.

Proof. Wir betrachten nur den Fall $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = a_0 = 0$. Zu $V \subset \Omega$ wähle $W_1 \subset \Omega$ und $W_2 \subset \Omega$ offen mit

$$\overline{V} \subset W_1 \subset \overline{W_1} \subset W_2 \subset \overline{W_2} \subset \Omega$$

und $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\xi = 1$ auf V, $\xi = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus W_1$ und $0 \le \xi \le 1$. Betrachte

$$\int_\Omega (\nabla\varphi)(\nabla u) = \int_\Omega \varphi f, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{15}$$

Setze $\varphi = -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$, wobei

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x+he_k) - u(x)}{h}, \quad h \ne 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi f = \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u &= \int_\Omega \nabla\left(D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)\right)\nabla u = \int_\Omega \nabla\left((\xi^2 D_k^h u)\right) D_k^h \nabla u \\
&= \int_\Omega 2\xi(\nabla\xi) D_k^h u D_k^h \nabla u + \int_\Omega \xi^2 D_k^h(\nabla u) D_k^h \nabla u \\
&\ge -C\|D_k^h u\|_{L^2(W_1)} \|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)} + \|\xi D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\ge \frac{1}{2}\|\xi D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|\nabla u\|^2_{L^2(W_1)}.
\end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} &\le C\|\nabla(\xi^2 D_k^h u)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(\|2\xi\nabla\xi D_k^h u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\xi^2 \nabla D_k^h u\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&\le C\left(\|D_k^h u\|^2_{L^2(W_1)} + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(W_1)}\right) \\
&\le C\left(\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(W_1)}\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
|\int_\Omega \varphi f| &\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}(\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)}) \\
&\le C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(W_1)} + \frac{1}{4}\|\xi^2 D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Also,

$$
\frac{1}{4}\|D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(V)} \le \frac{1}{4}\|\xi D_k^h \nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(W_1)})
$$

für h klein genug, d.h. $\nabla u \in H^1(V)$ und

$$
\|u\|_{H^2(V)} \le C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(W_1)}).
$$

Wähle $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\eta = 1$ auf W_1, $\eta = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus W_2$ und $0 \le \eta \le 1$. Mit $\varphi = \eta^2 u$ in (15) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f\varphi = \int_\Omega (\nabla\varphi)\nabla u &= \int_\Omega \eta^2(\nabla u)(\nabla u) + \int_\Omega 2\eta(\nabla\eta)u\nabla u \\
&\ge \|\eta\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|u\|_{L^2(W_2)}\|\eta\nabla u\|_{L^2(W_2)} \\
&\ge \frac{1}{2}\|\eta\nabla u\|^2_{L^2(W_2)} - C\|u\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
|\int_\Omega \varphi f| &\le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\le C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} \le \|\eta\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
$$

Also

$$
\|u\|_{H^1(W_2)} \le C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).
$$

□

THEOREM 2.2 (Höhere innere Regularität). *Sei $a_{ij}, a_0, b_i \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\Omega)$ und $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von* (14). *Dann ist $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für $V \subset\subset \Omega$ gilt:*

$$
\|u\|_{H^{m+2}(V)} \le C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),
$$

wobei C nur von Ω, V und a_{ij}, b_i, a_0 abhängt.

PROOF. Der Fall $m = 0$ ist klar. Wir betrachten nur den Fall $b_i = a_0 = 0$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ und das Theorem gelte für m. Insbesondere gilt dann $u \in H^{2+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für alle $V \subset\subset \Omega$ existiert $C > 0$ mit

$$\|u\|_{H^{2+m}(V)} \le C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \quad f \in H^m(\Omega). \tag{16}$$

Wir zeigen, dass das Theorem dann auch für $m+1$ gilt.
Sei $W \subset \Omega$ mit $\overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega$ und $|\alpha| = m+1$. Wähle $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(W)$ und $\varphi = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{\varphi}$. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij} \partial_i \tilde{\varphi} \partial_j \tilde{u} = \int_\Omega \tilde{\varphi} \tilde{f} \tag{17}$$

mit $\tilde{u} = D^\alpha u \in H^1(W)$ und

$$\tilde{f} = D^\alpha f - \sum_{\beta \le \alpha, \beta \ne \alpha} \left[- \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i (D^{\alpha - \beta} a_{ij} D^\beta \partial_j u) \right].$$

Insbesondere folgt aus (16) $\tilde{f} \in L^2(W)$ und

$$\|f\|_{L^2(W)} \le C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Daher folgt mit Theorem 2.1

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(V)} \le C(\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}) \le C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

d.h. $\|u\|_{H^{m+3}(V)} \le C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$. □

Im nächsten Schritt betrachten wir das Problem

$$- \sum_{i,j=1}^{d} \partial_j \big(a_{ij} \partial_i u\big) + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_i u + a_0 u = f \text{ in } \Omega \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \tag{18}$$

THEOREM 2.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt von der Klasse C^2, $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung von (18). Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von Ω und a_{ij}, b_i, a_0 abhängt.

PROOF. Wir betrachten wieder nur den Fall $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i = a_0 = 0$.
Schritt 1:
Sei $\Omega = B(0,1) \cap \mathbb{R}^d_+$ und setze $V = B(0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{R}^d_+$. Wähle $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\xi \equiv 1$ auf $B(0, \frac{1}{2})$, $\xi \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)$ und $0 \le \xi \le 1$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}^d_+} = 0$ und

$$\int_\Omega (\nabla\varphi)(\nabla u) = \int_\Omega \varphi f, \quad \varphi \in H^1_0(\Omega),$$

Für $k = 1, \dots, d-1$ setze $\varphi := -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$. Da

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\frac{1}{h} D_k^{-h}\left(\xi^2(x)\left[u(x+he_k) - u(x)\right]\right)\\ &= \frac{1}{h^2}\left(\xi^2(x-he_k)[u(x) - u(x-he_k)] - \xi^2(x)[u(x+he_k) - u(x)]\right),\\ &\quad x \in \Omega,\end{aligned}$$

folgt $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Wie im Beweis von Theorem 2.1 erhalten wir

$$\|D_k^h \nabla u\|_{L^2(V)}^2 \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2\right),$$

d.h. $\partial_k u \in H^1(V)$ für $k = 1, \dots, d-1$ und

$$\sum_{k,l=1,k+l<2d}^{d} \|\partial_k \partial_l u\|_{L^2(V)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{19}$$

Desweiteren gilt:

$$-\partial_d^2 u = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2 u - \Delta u = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2 u + f.$$

Damit (i. A. aus der Elliptizität)

$$\|\partial_d^2 u\|_{L^2(V)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right). \tag{20}$$

Außerdem gilt:

$$\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \le \int_\Omega (\nabla u)(\nabla u) = \int_\Omega uf \le \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{21}$$

Aus (19), (20) und (21) folgt nun

$$\|u\|_{H^2(V)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

<u>Schritt 2:</u>
Sei nun Ω beliebig und wähle zu $x \in \partial\Omega$

$$\Phi_x : \Omega' := B(x,r) \cap \mathbb{R}_+^d \to U(x),$$

$V' := B(x, r/2) \cap \mathbb{R}^d$ für ein $r > 0$ (vgl. Definition 5.2. Setze $V := \Phi_x(V')$. und $u' = u \circ \Phi_x$. Dann gilt $u' \in H^1(\Omega')$, $u|_{\partial\Omega' \cap \mathbb{R}_+^d} = 0$ und (dies ist noch zu Zeigen)

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a'_{ij} \partial_j \varphi' \partial_i u' = \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} b'_i \varphi' \partial_i u' + \int_\Omega a'_0 \varphi' u' + \int_\Omega \varphi' f',$$

mit $f' = f \circ \Phi_x$ und geeigneten a'_{ij}, b'_i und a'_0. Außerdem gilt (auch dies ist noch zu Zeigen)

$$\sum_{i,j=1}^{d} a'_{ij} \xi_i \xi_j \ge \alpha' |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Nach dem ersten Schritt ist $u' \in H^2(V')$ und es gilt

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq C(\|f'\|_{L^2(\Omega')} + \|u'\|_{L^2(\Omega')}),$$

wobei $C > 0$ unabhängig von f' ist. Also ist $u \in H^2(V)$ und es gilt

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

mit einer von f unabhängigen Konstante C.
Da $\partial\Omega$ kompakt ist, können wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen $V_1, \ldots, V_N$ überdecken. Dies liefert zusammen mit der inneren Regularität die gewünschte Abschätzung. □

Analog zu Theorem 2.2 erhalten wir

THEOREM 2.4. *Sei $a_{ij}, b_i, a_0 \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in H^m(\Omega)$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von* (18)*. Dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei C nur von Ω und a_{ij}, b_i, a_0 abhängt.

PROOF. Ohne Beweis. □

KOROLLAR 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ von der Klasse C^2, $b_i = 0$, $a_0(x) \geq 0$ für $x \in \Omega$, $f \in L^2(\Omega)$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von* (18)*. Dann ist $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei C nur von Ω und a_{ij}, a_0 abhängt.

PROOF. Lax-Milgram liefert $\|u\|_{H^1}(\Omega) \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$. (Die Einschränkung an die Koeffizienten liefert die Koerzivität). □

KAPITEL 4

Temperierte Distributionen und die Fouriertransformation

In diesem Kapitel entwickeln wir die wesentlichen Eigenschaften der Fouriertransformation. Für unsere Zwecke notwendig ist dabei eine Einführung in die Theorie der Distributionen, die wir voranstellen wollen. Wir werden uns hier jedoch auf temperierte Distributionen beschränken.

1. Temperierte Distributionen

Definition 1.1 (Schnell fallende Funktionen). *Eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt* schnell fallend*, falls für alle Multiindizes α, $\beta \in \mathbb{N}^n$*

$$d_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{|x^\alpha D^\beta \varphi(x)|\} < \infty.$$

Wir bezeichnen die Menge aller schnell fallenden Funktionen mit $\mathcal{S}$. Weiter versehen wir $\mathcal{S}$ mit der Topologie, die von der Menge der Halbnormen $\{d_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}$ induziert wird.

Bemerkung 1.2. *(a) Nach Definition konvergiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ gegen $\varphi \in \mathcal{S}$, wenn $d_{\alpha,\beta}(\varphi_n - \varphi) \to 0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ gilt.*

(b) Der Raum der schnell fallenden Funktionen ist ein Fréchet-Raum. Denn eine abzählbare Familie von Halbnormen ist gegeben durch

$$d_j(\varphi) := \sup_{|\alpha|=j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{(1+|x|^2)^j |D^\alpha \varphi(x)|\},\ j \in \mathbb{N}.$$

und

$$d(\varphi,\psi) := \sum_{j=0}^\infty \frac{2^{-j} d_j(\varphi-\psi)}{1+d_j(\varphi-\psi)}$$

definiert eine Metrik auf $\mathcal{S}$ mit der dieser Raum vollständig ist.

Definition 1.3. *Der Dualraum von $\mathcal{S}$ (versehen mit der schwach-* Topologie) heißt der Raum der temperierten Distributionen und wird mit $\mathcal{S}'$ bezeichnet. D.h.:*

$$\mathcal{S}' := \{f : \mathcal{S} \to \mathbb{C} : f \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Wir schreiben $\langle f, \varphi\rangle$ für die duale Paarung zwischen $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}$.

Bemerkung 1.4. *(a) Eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'$ konvergiert gegen $T \in \mathcal{S}'$, falls $\langle T_n - T, \varphi\rangle \to 0$ für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{S}$.*

(b) *Die Definition der Ableitung stimmt für stetig differenzierbare Funktionen mit der üblichen Definition der Ableitung überein.*

Beispiele 1.5. (a) *Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ messbar mit $\int (1+|x|^2)^{-r} f(x) \mathrm{d}x < \infty$ für ein $r \geq 0$. Dann definiert*

$$T_f(\varphi) := \int f\varphi \, \mathrm{d}x$$

eine temperierte Distribution. Insbesondere ist also in diesem Sinne $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$ für $1 \leq p \leq \infty$.

(b) *Das Auswertfunktional $\delta(\varphi) := \varphi(0)$ definiert ebenfalls eine temperierte Distribution die sogenannte Diracsche δ-Distribution.*

(c) *Cauchy Hauptwert:*
Durch

$$ch - \frac{1}{x}(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

wird eine Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definiert.

Proof. Einfach, bzw. in den Übungen. □

Definition und Satz 1.6. *Es seien $T \in \mathcal{S}'$, $\psi \in \mathcal{S}$ und p ein Polynom.*

(a) *Die Ableitung D_i in Richtung $i = 1, \ldots, d$ ist definiert durch*

$$\langle D_i T, \varphi \rangle := -\langle T, D_i \varphi \rangle.$$

(b) *Die Multiplikation von T mit ψ bzw. p ist definiert durch*

$$\langle \psi T, \varphi \rangle := \langle T, \psi\varphi \rangle \quad \varphi \in \mathcal{S}$$
$$\langle pT, \varphi \rangle := \langle T, p\varphi \rangle \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

Diese Definitionen sind wohldefiniert, d.h. für $\alpha \in \mathbb{N}^d$ gilt $D^\alpha T$, pT, $\psi T \in \mathcal{S}'$.

Proof. Übung □

Mit Hilfe der Notation $\tilde{\tau}_x g(y) := g(x - y)$ übertragen wir die Faltung auf Distributionen.

Definition 1.7 (Faltung von Distributionen mit Funktionen). *Es seien $T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann definieren wir die Faltung $T * \varphi$ durch*

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle.$$

Satz 1.8. *Es seien $T \in \mathcal{S}'$ und $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, dann gilt $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $D_j(T * \varphi) = (D_j T) * \varphi = T * (D_j \varphi)$.*

Proof. 1. $T * \varphi$ ist stetig:
Es gilt $\tilde{\tau}_z \varphi(y) - \tilde{\tau}_x \varphi(y) = \varphi(z-y) - \varphi(x-y)$ und damit folgt $\tilde{\tau}_z \varphi(y) \to \tilde{\tau}_x \varphi(y)$ in $\mathcal{S}$, falls $z \to x$ (MWS). Also $\langle T, \tilde{\tau}_z \varphi \rangle \to \langle T, \tilde{\tau}_x \varphi \rangle$ und damit $\lim_{z \to x} (T * \varphi)(z) = (T * \varphi)(x)$.

2. Differenzierbarkeit: Es sei $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und e_i der i-te Einheitsvektor. Dann gilt

$$\frac{1}{h}\left(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\right)(y) = \frac{1}{h}\left(\varphi(x+he_i-y) - \varphi(x-y)\right).$$

Wie oben folgt daher $\frac{1}{h}\left(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\right) \overset{h\to 0}{\to} \tilde{\tau}_x(\partial_i\varphi)$ in $\mathcal{S}$. Also folgt

$$\begin{aligned}
\partial_i(T*\varphi)(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\langle T, \tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\rangle \\
&= \lim_{h\to 0}\langle T, \frac{1}{h}\left(\tilde{\tau}_{x+he_i}\varphi - \tilde{\tau}_x\varphi\right)\rangle \\
&\overset{T \text{ stetig}}{=} \langle T, \tilde{\tau}_x\partial_i\varphi\rangle \\
&\overset{\text{Def}}{=} \left(T*\partial_i\varphi\right)(x)
\end{aligned}$$

und damit existiert die partielle Ableitung von $T*\varphi$ mit $\partial_i(T*\varphi) = T*\partial_i\varphi$. Insbesondere ist damit $\partial_i(T*\varphi)$ eine stetige Funktion. Mit Induktion folgt schließlich $(T*\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

3. $\partial_i(T*\varphi) = (\partial_i T)*\varphi$:

Es gilt $(\partial_i\varphi)(x-y) = -(\partial_i\varphi(x-\cdot))(y)$, also ist auch $\partial_i(\tilde{\tau}_x\varphi) = -\tilde{\tau}_x(\partial_i\varphi)$ damit rechnen wir unter Verwendung von Obigem

$$\begin{aligned}
\partial_i(T*\varphi)(x) &= (T*\partial_i\varphi)(x) = \langle T, \tilde{\tau}_x(\partial_i\varphi)\rangle \\
&= \langle T, -\partial_i(\tilde{\tau}_x\varphi)\rangle = \langle \partial_i T, \tilde{\tau}_x\varphi\rangle = \left((\partial_i T)*\varphi\right)(x).
\end{aligned}$$

□

2. Die Fouriertransformation

Definition 2.1. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist die Fouriertransformation von f definiert durch*

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemma 2.2. *Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $\hat{f} \in \mathrm{BC}(\mathbb{R}^d)$ und es gilt*

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Proof. Es sei $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $(\xi_k) \subset \mathbb{R}^d$ mit $\xi_k \to \xi$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty}|\hat{f}(\xi_k) - \hat{f}(\xi)| \le \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\left|\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi_k\rangle} - \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\right| \overset{\text{Lebesgue}}{=} 0,$$

d.h. $\hat{f}$ ist stetig. Desweiteren gilt:

$$|\hat{f}(\xi)| \le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)| = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

□

Satz 2.3. *Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

(a) $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^d} f \hat{g}$.

(b) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(c) Es sei $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. *Dann gilt*

$$\partial^\alpha \hat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha f}.$$

(d) Es sei $f \in W^{k,1}(\mathbb{R}^d)$. *Dann gilt*

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ *mit* $|\alpha| \leq k$

(e) Es gilt $\mathcal{F}\left(L^1(\mathbb{R}^d)\right) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ *(Riemann-Lebesgue).*

Proof. (a) Wir erhalten mit Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi) \,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle} \,\mathrm{d}x g(\xi) \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi) \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle} \,\mathrm{d}\xi \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{g}(x) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) \,\mathrm{d}y \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mathrm{e}^{-i\langle y, \xi\rangle} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \mathrm{e}^{-i\langle x-y, \xi\rangle} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \mathrm{e}^{-i\langle y, \xi\rangle} \hat{f}(\xi) \,\mathrm{d}y = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

(c) Da $\partial_\xi^\alpha \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle} = (-ix)^\alpha \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle}$ gilt, folgt für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\partial_j \hat{\varphi}(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle} \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{\mathrm{e}^{-i\langle x, \xi + h e_j\rangle} - \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle}}{h} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Lebesgue}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} -ix_j \varphi(x) \mathrm{e}^{-i\langle x, \xi\rangle} \,\mathrm{d}x \\
&= \widehat{(-ix)^{e_j} \varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ j = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

Approximiere f mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(d) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:

$$\widehat{\partial_j \varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\partial_j \varphi)(x) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)(-i\xi_j) \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle} \,\mathrm{d}x$$
$$= (i\xi)^{e_j} \hat{\varphi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ j = 1, \dots, d.$$

Approximiere $f \in W^{k,1}(\mathbb{R}^d)$ mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(e) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt $\partial_x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Insbesondere folgt aus (d), dass $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{\varphi}(\xi) = 0$, d.h. $\hat{\varphi} \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Approximiere $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

□

BEISPIEL 2.4. *Sei $a > 0$ und $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|^2}$. Dann gilt:*

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

PROOF. Sei $d = 1$. Dann gilt

$$(\hat{f})'(\xi) = \widehat{(-ix)\mathrm{e}^{-a|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{i}{2a}\widehat{(\mathrm{e}^{-a|x|^2})'}\right)$$
$$= \frac{i}{2a}(i\xi)\hat{f}(\xi) = -\frac{1}{2a}\xi\hat{f}(\xi).$$

Damit folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\mathrm{e}^{\frac{|\xi|^2}{4a}} \hat{f}(\xi)\right) = 0;$$

also ist $\mathrm{e}^{|\xi|^2/4a}\hat{f}(\xi)$ konstant. Die Konstante ergibt sich aus

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a|x|^2} \,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Somit erhalten wir die Behauptung für $d = 1$. Der allgemeine Fall folgt nun mit Fubini:

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{j=1}^d \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ax_j^2} \mathrm{e}^{-ix_j\xi_j} \,\mathrm{d}x_j = \left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

□

NOTATION 2.5. *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definieren wir*

$$\check{f}(\xi) := \hat{f}(-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

THEOREM 2.6 (Inversionsformel der Fouriertransformation). *Seien* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. *Dann gilt:*

$$(\hat{f})\check{} = \widehat{\check{f}} = f, \qquad f. \ ü.$$

PROOF. Für $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ setze

$$\varphi_{x,t}(z) := \mathrm{e}^{i\langle x,z\rangle}\mathrm{e}^{-t^2|z|^2}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{x,t}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x-\xi,z\rangle}\mathrm{e}^{-t^2|z|^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2^{\frac{d}{2}}t^d}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t^2}} \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}t^d}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t^2}} := (2\pi)^{\frac{d}{2}}g_t(x-\xi),\end{aligned}$$

wobei $g(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\mathrm{e}^{-|x|^2/4}$ und $g_t(x) := 1/t^d g(x/t)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{x,t}(\xi)\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat{\varphi}_{x,t}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\xi)g_t(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{\frac{d}{2}}(f * g_t)(x).\end{aligned} \tag{22}$$

Man zeigt (vgl. Mollifier)

$$\lim_{t\to 0}\|f * g_t - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Desweiteren gilt:

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_{x,t}(\xi)\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^{\frac{d}{2}}(\hat{f})\check{}(x). \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt $f = (\hat{f})\check{}$. Analog zeigt man $f = \widehat{\check{f}}$. □

KOROLLAR 2.7. *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *und* $\hat{f} = 0$. *Dann gilt* $f = 0$.

PROOF. Klar. □

THEOREM 2.8 (Plancherel). *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. *Dann ist* $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *und die Abbildung* $\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)}$ *kann eindeutig zu einem unitärem Isomorphismus* $\mathcal{F}_2$ *auf* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *fortgesetzt werden.*

PROOF. Sei $X := \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$. Dann ist insbesondere $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. $X \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Ferner ist X dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$, da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset X$.
Seien $f, g \in X$ und $h := \overline{g}$. Dann gilt:

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x} = \overline{g(\xi)},$$

d.h.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f\overline{g} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f\hat{h} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}h = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}\overline{\hat{g}}.$$

Insbesondere folgt mit $g = f$, dass $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ gilt. Da $\mathcal{F}X = X$ kann $\mathcal{F}|_X$ zu einem unitären Isomorphismus $\mathcal{F}_2$ fortgesetzt werden.
Es bleibt zu Zeigen, dass

$$(\mathcal{F}_2 f)(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d).$$

Sei $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$$
$$\lim_{j\to\infty} \|f - \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Einerseits gilt $\lim_{j\to\infty} \|\hat{f} - \hat{\varphi}_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0$, d.h.

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{B(0,R)} |\hat{\varphi}_j(\xi) - \hat{f}(\xi)| \,\mathrm{d}\xi = 0, \quad R > 0.$$

Andererseits folgt mit Plancherel

$$\lim_{j\to\infty} \|\hat{\varphi}_j - \mathcal{F}_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

d.h.

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{B(0,R)} |\hat{\varphi}_j(\xi) - \mathcal{F}_2 f(\xi)| \,\mathrm{d}\xi = 0, \quad R > 0.$$

Damit folgt $\mathcal{F}_2 f(\xi) = \hat{f}(\xi)$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. □

SATZ 2.9 (Hausdorff-Young-Ungleichung). *Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0$ mit $p \in [1,2]$. Der Operator $\mathcal{F}$ kann zu einem stetigen Operator $\mathcal{F}_{p,q} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden. Es gilt:*

$$\|\mathcal{F}_{p,q}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^d), L^q(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{p} - \frac{d}{2}}}.$$

PROOF. Wir wissen bereits, dass $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ stetig sind. Daher folgt die Behauptung aus dem Riesz–Thorin Konvexitätstheorem (man ersetze ∞ durch 2). □

BEMERKUNG 2.10. *Für $p > 2$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ist $\hat{f}$ i. A. keine Funktion mehr (vgl. Distributionen-Theorie).*

PROOF. Ohne Beweis. □

SATZ 2.11. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

(a) Sei $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$. Dann gilt

$$\partial^\alpha \hat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha} f.$$

(b) Sei $f \in H^k(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$.

Proof. Nach Satz 2.3 gilt die Behauptung für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Approximiere $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und nutze Plancherel. □

Satz 2.12. *Die Fouriertransformation ist ein topologischer Isomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$.*

Proof. Wegen einfacherer Notation setzen wir zunächst $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{N}^d$ Wir verwenden Satz 2.3 und erhalten für $\varphi \in \mathcal{S}$ und α, $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(\xi)| &= |\xi^\alpha (-1)^{|\beta|} \mathcal{F}(x\beta\varphi)| \\
&= |\mathcal{F}(D^\alpha (-x)^\beta \varphi)| \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha (x^\beta \varphi(x))| \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2\pi)d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^{-m} (1+|x|^2)^m |D\alpha(x^\beta \varphi(x))| \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wählen wir m so, dass $\int (1+|x|^2)^{-m} \, \mathrm{d}x = M < \infty$ gilt, so folgt

$$|\xi^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(\xi)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|^2)^m |D\alpha(x^\beta \varphi(x))| M \tag{24}$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt, folgt somit auch $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$. $\mathcal{F}$ ist linear und mit (24) folgt auch, dass $\mathcal{F}\varphi_n \to 0$, falls $\varphi_n \to 0$, also ist $\mathcal{F}$ stetig.
Mit Theorem 2.6 folgt schließlich die Bijektivität und die Stetigkeit von $\mathcal{F}^{-1}$, da $\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \mathcal{F}\varphi(-x)$. □

Setzt man die Fouriertransformation in natürlicher Weise auf komplexe Variablen fort, so erhalten wir die folgende Verbindung zwischen holomorphen Funktionen und Funktionen mit kompaktem Träger. Wir bemerken hierzu noch, dass eine Funktion $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ holomorph ist, wenn sie in jeder Koordinate holomorph ist.

Satz 2.13 (Paley-Wiener). *Eine ganze holomorphe Funktion $F(\zeta) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ist genau dann die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,R)$, d.h.*

$$F(\zeta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i\langle\zeta,x\rangle} f(x) \, \mathrm{d}x,$$

wenn es für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante C_N gibt, so dass

$$|F(\zeta)| \leq C_N(1+|\zeta|)^{-N} \mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}\,\zeta|}. \tag{25}$$

PROOF. Es sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$. Dann folgt mit partieller Integration für jedes $\beta \in \mathbb{N}^d$ mit $|\beta| = N$

$$\begin{aligned} |(i\zeta)^\beta F(\zeta)| &= |(2\pi)^{-d/2} \int\limits_{B(0,R)} \mathrm{e}^{-i\langle\zeta,x\rangle} \partial^\beta f(x)\,\mathrm{d}x| \\ &\leq \mathrm{e}^{|\mathrm{Im}\,\zeta|R} (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{B(0,R)} |\partial^\beta f(x)|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Für die Rückrichtung definieren wir zunächst

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle\xi,x\rangle} F(\xi). \tag{26}$$

Die Inversionsformel liefert nun, dass $\hat{f}(\xi) = F(\xi)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt, da aus der Glattheit von F folgt, dass $\check{F} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt.
Zur Eingrenzung des Trägers von f differenzieren wir zunächst (26) unterm Integralzeichen. Dies ist durch die Voraussetzung (25) gerechtfertigt. Es folgt somit

$$\partial^\beta f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} (i\xi)^\beta F(\xi)\,\mathrm{d}x \tag{27}$$

Wir setzen nun für ein $\alpha > 0$ $\eta = \alpha\frac{x}{|x|}$ und wenden Cauchys Integralsatz sukzessive auf (26) an und erhalten

$$f(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi+i\eta\rangle} F(\xi+i\eta)\,\mathrm{d}\xi$$

wobei die Integrale über die Wege in imaginärer Richtung wegen (25) im Grenzfall verschwinden.
Für $N = d+1$ erhalten wir nun wieder mit der Voraussetzung die Abschätzung

$$|f(x)| \leq C\mathrm{e}^{R|\eta|-\langle x,\eta\rangle} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|)^{-d-1}\,\mathrm{d}\xi.$$

Da dies für beliebige $\alpha > 0$ gilt, folgt (mit $\alpha \to \infty$) für $|x| > R$, dass $f(x) = 0$. Also folgt $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$. □

DEFINITION UND SATZ 2.14. *Sei $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $T_m : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, $T_m f := \mathcal{F}_2^{-1}(m\mathcal{F}_2 f)$ ein stetiger Operator mit*

$$\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Die Funktion m heißt Fourier–Multiplikator.

PROOF. Plancherel liefert

$$\begin{aligned}\|T_m f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|\mathcal{F}_2^{-1}(m\mathcal{F}_2 f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|m\mathcal{F}_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|\mathcal{F}_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),\end{aligned}$$

d.h. $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \le \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $0 < |\Omega| \le 1$ mit $\inf_{x\in\Omega} |m(x)| \ge \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} - \varepsilon$.
Dann gilt für $\varphi = \chi_\Omega$

$$\begin{aligned}\|T_m(\mathcal{F}_2^{-1}\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|m\mathcal{F}_2\mathcal{F}_2^{-1}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|m\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\ge \Big(\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} - \varepsilon\Big)\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

d.h. $\|T_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$. □

BEMERKUNG 2.15. *Man kann zeigen, dass $m \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ eine notwendige Bedingung ist.*

DEFINITION 2.16. *Die Fouriertransformation für temperierte Distributionen ist definiert durch $\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle := \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle$, $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$.*

SATZ 2.17. *Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist stetig. Ist $\psi \in \mathcal{S}$ und ist $T_\psi \in \mathcal{S}'$ die von ψ erzeugte Distribution (via $\langle T_\psi, \varphi\rangle := \int \psi\varphi$), so gilt $\hat{T}_\psi = T_{\hat{\psi}}$.*

PROOF. $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$ folgt aus der Stetigkeit von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}$, da für $\varphi_k \to \varphi$

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi_k\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi_k\rangle \to \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle$$

gilt.
Die Stetigkeit von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}'$ folgt ähnlich, denn für $T_k \to T$ in $\mathcal{S}'$ folgt

$$\langle \hat{T}_k, \varphi\rangle = \langle T_k, \hat{\varphi}\rangle \to \langle T, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{T}, \varphi\rangle$$

□

SATZ 2.18. *Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}'$ mit Inverser $\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle$.*

PROOF. Es sei $T \in \mathcal{S}'$ und $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

also folgt $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id_{\mathcal{S}'}$ und analog $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}'}$. □