

# **Partielle Differentialgleichungen I**

Matthias Geißert, Robert Haller-Dintelmann, Horst  
Heck



## Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einführung in die Problematik	0
1. Physikalische Motivation	0
2. Mathematische Problemstellung	0
Kapitel 2. Sobolevräume	3
1. $L_p$ Räume (Erinnerung)	3
2. $L_p$ Räume II	8
3. Sobolev Räume I.	15
4. Sobolev Räume II. – Einbettungssätze	19
5. Sobolev Räume III. - Gebiete	24
6. Sobolev Räume IV. Spurooperatoren	29
Kapitel 3. Elliptische Randwertproblem in $L^2$	32
1. Elliptische Randwertprobleme	32
2. $L^2$ -Regularitätstheorie	34

## KAPITEL 1

# Einführung in die Problematik

### 1. Physikalische Motivation

Betrachte einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung. Nun wollen wir untersuchen wie die Wärme geleitet wird.

**Annahmen:**

- Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall  $[0, 1]$ ,  $u(t, x) =$  Temperatur in  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ .
- Konstanten:  $\rho$  Dichte,  $c$  spezifische Wärme
- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  Wärmequelle
- Energie in Segment  $[x_1, x_2]$ :  $E(x_2, x_1, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(t, x_1)$
- Wärmeleitungsregel von Fourier: Sei  $Q(t, x) =$  die Wärme durch Punkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$

$$\frac{Q(t_2, x) - Q(t_1, x)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x) \quad K_0 \text{ Thermale Konduktivität}$$

- Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} & c\rho(x_2 - x_1)(u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)) \\ &= (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1) \left( \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_1) - \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_2) \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_1)}{x_2 - x_1}$$

und damit

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{f(x)}{c\rho} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x),$$

wobei  $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$  die thermische Diffusivität (eine Konstante) ist.

**Stationäre Temperaturverteilung (Gleichgewicht, steady state):**

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \xrightarrow{u(t,x)=v(x)} 0 = f(x) + \Delta v(x) \implies \Delta v(x) = -f(x).$$

### 2. Mathematische Problemstellung

Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt.

Gegeben: Stetige Funktion  $f$  auf  $\overline{\Omega}$ .

Gesucht: Stetige Funktion  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , in  $\Omega$  zweimal differenzierbar mit

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0(x) & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

**Anwendung:** Potential eines Ladungsfreies elektrisches Feldes.

$u$  stationäre Temperaturverteilung

BEMERKUNG 2.1.  $\Delta$  ist ein linearer Operator  $\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v$ .

**Idee:** Definiere den Laplace-Operator in geeigneten Räumen und untersuche Abbildungsvorschriften.

Sei z.B.  $X := \{h : h \in C^2(\overline{\Omega}), h|_{\partial\Omega} = 0\}$  und  $Y := C(\overline{\Omega})$  und betrachte  $\Delta_{XY} : X \rightarrow Y$ .

*Typische Fragestellungen:*

- Ist  $\Delta_{XY}$  injektiv (d.h. die Lösung der Gleichung 2 ist eindeutig, falls sie existiert)
- Ist  $\Delta_{XY}$  surjektiv (d.h. es existiert eine Lösung der Gleichung 2 für alle  $f \in Y$ ).
- Finde möglichst einen großen Raum  $Y$  so dass  $\Delta_{XY}$  surjektiv ist (d.h. die Gleichung ist für viele  $f$  lösbar).
- Da  $X$  typischerweise nicht explizit gegeben ist, finde möglichst viele Eigenschaften von  $X$  (d.h. Eigenschaften der Lösung).

BEMERKUNG 2.2. (a) Der Laplace-Operator besitzt keine guten Eigenschaften in  $C(\overline{\Omega})$ . Suche nach geeigneten Räumen führt auf Sobolev-Räume (reflexive Banachräume bzw. Hilberträumen).

**Idee ( $L_2$ -Theorie):**

- Die Existenz einer schwachen Lösung lässt sich im Hilbertraumfall ( $L_2$ -Theorie) sehr einfach über Lax-Milgram zeigen.
- Regularitätstheorie liefert dann eine starke bzw. klassische Lösung.

BEMERKUNG 2.3. Eine wichtige Rolle bei der Regularitätstheorie spielt die sogenannte Lokalisierung.

**Idee ( $L_p$ -Theorie):**

- Betrachte zunächst

$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Benutze die sog. *Fouriertransformation*. Die zentrale Eigenschaft dieser Abbildung ist, dass sie Differentialausdrücke in algebraische umwandelt. Im Fall  $(\lambda - \Delta)$  erhält man

$$(\lambda + |\xi|^2)\mathcal{F}u = \mathcal{F}f.$$

Damit ist die formale Inverse von  $(\lambda - \Delta)$  durch  $u = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}f$  gegeben.

*Typische Fragestellungen:*

- (a) Wie kann man dem formalen Ausdruck  $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$  als Operator:  $Y \rightarrow X$  einen Sinn zu geben?
- (b) Finde hinreichende Bedingungen, so dass  $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$  ein beschränkter Operator in  $L_p$  ist.

BEMERKUNG 2.4. *Auf diesem Weg werden wir auch erkennen, dass sich  $T = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$  auch als Integraloperator, d.h.  $Tf(x) = \int k(x, y)f(y)dy$ , darstellen lässt.*

Im letzten Abschnitt betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung (1).

**Idee:**

- (a) Betrachte  $u$  als Funktion  $t \rightarrow u(t, \cdot) \in X$ ,  $X$  ein Funktionenraum (Sobolevraum)
- (b) Sei  $\Delta$  der Laplaceoperator und betrachte

$$\begin{aligned} u'(t) - \Delta u(t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL im Banachraum!

- (c) Ana III: Lösung ist  $e^{\Delta t}u_0$ .

*Typische Fragestellungen*

- (a) Vernünftige Definition für  $e^{tA}$  für große Klassen von (Differential-)operatoren.
- (b) Suche Bedingungen an  $A$ , so dass  $e^{tA}$  wohldefiniert ist

BEMERKUNG 2.5. *Für spezielle (in Physik und Ingenieurwissenschaften sehr relevante) Klassen von Differentialoperatoren, sog. Divergenzoperatoren, lässt sich zeigen, dass  $e^{tA}$  wieder ein Integraloperator ist (z.B. Laplace auf beliebigen offenen Mengen).*

## Sobolevräume

### 1. $L_p$ Räume (Erinnerung)

In diesem Abschnitt sei  $(M, \Sigma, \mu)$  stets ein Maßraum.

DEFINITION 1.1.

- (a) Sei  $1 \leq p < \infty$ . Setze  $\|f\|_p := \left( \int_M |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ .
- (b) Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{K}$  messbar. Dann heißt  $f$  wesentlich beschränkt, falls ein  $\alpha > 0$  existiert mit  $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$ . Ferner heißt
- $$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$
- das wesentliche Supremum von  $f$ .
- (c) Sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Definiere
- $$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K}) := \{f : f : M \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\}.$$

BEMERKUNG 1.2.

- (a)  $\|\cdot\|_p$  ist eine Halbnorm auf  $\mathcal{L}^p$ .
- (b) Sei  $f \in \mathcal{L}^p$ . Dann ist  $\|f\|_p = 0$  genau dann wenn
- $$f \in \mathcal{N} := \{f : f \text{ messbar und } f = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\}.$$
- (c)  $\mathcal{L}^p$  ist ein Vektorraum.
- (d)  $\mathcal{N}$  ist ein Unterraum von  $\mathcal{M}$ , dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von  $\mathcal{L}^p$ ), und

$$f \sim g \iff f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation

DEFINITION 1.3. Der Raum  $L^\infty$  ist definiert durch:

$$L^\infty(M, \mu) := \mathcal{L}(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \quad \|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty, \quad \forall [f] \in L^\infty.$$

SATZ 1.4.

- (a)  $|f| \leq \|f\|_\infty$   $\mu$ -fast überall.
- (b)  $\|\cdot\|_\infty$  ist ein Norm.
- (c)  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \implies$  es existiert ein  $A \in \Sigma$  mit  $\mu(A^c) = 0$  und  $f_n \rightarrow f$  gleichmässig auf  $A$ .
- (d)  $(L^\infty(M, \mu), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum.

DEFINITION 1.5. Sei  $1 \leq p < \infty$

$$L^p(M, \mu) := (M, \Sigma, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \quad \forall [f] \in L^p.$$

SATZ 1.6 (Höldersche Ungleichung). Es sei  $1 \leq p, q \leq \infty$  mit  $1/p + 1/q = 1$  (interpretiere  $1/\infty = 0$ ). Desweiteren seien  $f \in L^p(M, \mu)$  und  $g \in L^q(M, \mu)$ . Dann ist  $f \cdot g \in L^1(M, \mu)$  und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

PROOF. Die Fälle  $p = 1, \infty$  sind trivial. Seien  $a, b \in \mathbb{R}_+$  und  $f, g \neq 0$ . Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (\text{Youngsche Ungleichung}).$$

(Der Beweis dieser Ungleichung ist elementar.) Natürlich ist  $fg$  messbar. Seien  $G := g/\|g\|_q$  und  $F := f/\|f\|_p$ . Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt  $x \in M$  ergibt nach Integration

$$\int_M |F(x)G(x)| \, d\mu(x) \leq \int_M \frac{|F(x)|^p}{p} \, d\mu(x) + \int_M \frac{|G(x)|^q}{q} \, d\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt.  $\square$

SATZ 1.7 (Minkowskische Ungleichung). Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $f, g \in L^p(M, \mu)$ . Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

SATZ 1.8 (Riesz–Fischer). Sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann ist  $L^p(M, \mu)$  vollständig.

SATZ 1.9. Nehmen wir an, dass  $f_n \in L^p(M, \mu)$  gegen  $f \in L^p(M, \mu)$  konvergiert, dann existiert eine Teilfolge  $f_{n_k}$ , so dass  $f_{n_k}(x)$   $\mu$ -fast überall konvergiert.

SATZ 1.10 (Dualität). Sei  $1 \leq p < \infty$ , und  $(M, \Sigma, \mu)$   $\sigma$ -endlicher Maßraum. Sei  $1/p + 1/q = 1$  (so genannte konjugierte Exponente). Dann definiert  $L^q(M, \mu) \rightarrow L^p(M, \mu)'$

$$J(g)f := \int_M f \cdot g \, d\mu, \quad g \in L^q(M, \mu), f \in L^p(M, \mu),$$

einen isometrischen Isomorphismus.

PROOF.  $J$  ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist  $J$  linear.  $J$  ist isometrisch, denn sei  $g \in L^q(M, \mu)$  und setze

$$f := \frac{\bar{g}}{|g|} \left( \frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^{q/p}.$$

Dann

$$\|f\|_p = \int_M \left( \frac{|\bar{g}|}{|g|} \right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \, d\mu = 1$$

und  $\int_M fg \, d\mu = \|g\|_q$ . Es bleibt die Surjektivität von  $J$  zu zeigen.



1. Fall  $\mu(M) < \infty$ : Sei  $\varphi \in L^p(M, \mu)'$ . Betrachte  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$  ( $\chi_A \in L^p(M, \mu)$ ).  $\nu$  ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist  $\nu$  absolut stetig bezüglich  $\mu$ , denn  $A \in \Sigma$  und  $\mu(A) = 0$  impliziert  $\chi_A = 0$   $\mu$ -fast überall, d.h.  $\chi_A = 0$  in  $L^p(M, \mu)$ , also  $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$ . Satz von Radony–Nikodým ergibt  $g \in L^1(M, \mu)$  mit

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu = \int_M \chi_A g \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Also wegen Linearität

$$(3) \quad \varphi(f) = \int_M f g \, d\mu \quad \forall \text{ Treppenfunktionen } f.$$

Ferner  $|\varphi(f)| \leq C' \|f\|_\infty$ . Die Treppenfunktionen sind dicht in  $L^\infty(M, \mu)$  also gilt (3) für  $f \in L^\infty(M, \mu)$ . Wir zeigen nun  $g \in L^q(M, \mu)$ . Sei erst  $q < \infty$ . Setze

$$(4) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$f$  ist messbar und  $|g|^q = fg = |f|^p$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A_n := \{x \in M : |f(x)| \leq n\}$ . Dann ist  $\chi_{A_n} f \in L^\infty(M, \mu)$  und

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |g|^q \, d\mu &= \int_M \chi_{A_n} f g \, d\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \leq \|\varphi\| \|\chi_{A_n} f\|_p = \\ &= \|\varphi\| \left( \int_{A_n} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \|\varphi\| \left( \int_{A_n} |g|^q \, d\mu \right)^{1/p} \\ &\implies \left( \int_{A_n} |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz von Beppo Levi(monotone Konvergenz) gibt  $g \in L^q(M, \mu)$ .

Jetzt betrachten wir der Fall  $q = \infty$ . Dann  $|g| \leq \|\varphi\|$ , denn sei  $A := \{x \in M : |g(x)| > \|\varphi\|\}$ . Setze  $f := \chi_A |g|/g$ ,  $f \in L^\infty(M, \mu)$ . Nehmen wir  $\mu(A) > 0$  an.

$$\mu(A) \|\varphi\| < \int_A |g| \, d\mu = \int_M f g \, d\mu = \varphi(f) \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme  $\implies \mu(A) < \|f\|_1$ , Widerspruch mit  $\mu(A) = \|f\|_1$ . Also  $g \in L^\infty(M, \mu)$ .

Die Treppenfunktionen sind dicht in  $L^p(M, \mu)$  also  $\varphi = Jg$ .

2. Fall,  $\mu(M) = \infty$ : Es sei  $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$  mit  $\mu(M_n) < \infty$ , und  $M_n$  paarweise disjunkt. Sei  $\varphi \in L^p(M, \mu)'$ . Setze  $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$ , für  $f \in L^p(M_n, \mu_n)$ , wobei  $\mu_n(A) := \mu(M_n \cap A)$ . Dann  $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$ , insbesondere  $\varphi_n \in L^p(M_n, \mu_n)'$ . Verwende jetzt den ersten Fall um  $g_n \in L^q(M_n, \mu_n)$  zu

bekommen. Setze  $g := \sum_{n=1}^{\infty} g_n$  (in jedem Punkt nur ein Summand,  $g_n$  wird durch 0 fortgesetzt auf  $M_n^c$ ). Es ist  $g \in L^q(M, \mu)$  und  $\varphi = Jg$  zu zeigen. Sei  $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$  und  $f$  wie in (4)

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |g|^q d\mu &= \sum_{j=1}^n \int_{M_j} fg d\mu = \sum_{j=1}^n \int \chi_{M_j} f g_j d\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f) \\ &= \varphi\left(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f\right) \leq \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p \\ &= \|\varphi\| \cdot \left(\sum_{j=1}^n \int |\chi_{M_j} f|^p d\mu\right)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \left(\int_{A_n} |g|^q d\mu\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $(\int_{A_n} |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|$ , und nach Beppo Levi Theorem  $g \in L^q(M, \mu)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} f\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} fg \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \chi_{A_n} fg \stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \int_M fg. \end{aligned}$$

□

**SATZ 1.11** ( $L^p$  Interpolation Ungleichung). *Seien  $p_0, p_1 \in [1, \infty]$ ,  $\theta \in (0, 1)$  und  $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ . Sind  $f \in L^{p_0}(M, \mu) \cap L^{p_1}(M, \mu)$ , dann ist  $f \in L^{p_\theta}(M, \mu)$  und es gilt*

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^\theta.$$

**PROOF.** Setze  $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$  und  $h := |f|^{\theta p_\theta}$ . Dann ist  $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$ , ferner  $g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(M, \mu)$  und  $h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(M, \mu)$  und

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \leq \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. □

**SATZ 1.12** (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung). *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p_i \leq \infty$ ,  $f_i \in L^{p_i}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Sei ferner  $1 \leq p \leq \infty$  so, dass  $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$ . Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_p \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

**PROOF.** ÜA. □

**DEFINITION UND SATZ 1.13.** (a)  $L^1 \cap L^\infty(M, \mu) := L^1(M, \mu) \cap L^\infty(M, \mu)$  versehen mit der Norm  $\|f\|_{1 \cap \infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$  ist ein Banachraum.

(b) Definiere

$$L^1 + L^\infty(M, \mu) := \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \text{ mb.} : \exists g \in L^1(M, \mu), h \in L^\infty(M, \mu) \\ \text{mit } f = g + h\}.$$

Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty : f = g + h : g \in L^1(M, \mu), h \in L^\infty(M, \mu)\}.$$

ist eine Norm, mit der  $L^1 + L^\infty$  ein Banachraum ist.

SATZ 1.14. Sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt  $L_p(M, \mu) \subseteq L_1 + L_\infty(M, \mu)$ .

PROOF. Der Fall  $p = \infty$  ist trivial. Sei  $f \in L^p(M, \mu)$ . Setze  $A := \{x \in M : |f(x)| \geq 1\}$  und  $h := \chi_A f$ ,  $g := \chi_{M \setminus A} f$ . Dann  $g \in L^\infty(M, \mu)$  und  $h \in L^1(M, \mu)$ , denn

$$\int_M |h| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu \leq \int_A |f|^p \, d\mu \leq \int_M |f|^p \, d\mu.$$

□

THEOREM 1.15 (Riesz–Thorin Konvexitätstheorem). Sei  $T : L_1 + L_\infty \rightarrow L_1 + L_\infty$  linear, ferner seien  $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1, \infty]$  mit  $p_0 < p_1$  und  $r_0 < r_1$ . Sei  $\alpha \in (0, 1)$  und setze

$$\frac{1}{p_\alpha} := \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_\alpha} := \frac{1-\alpha}{r_0} + \frac{\alpha}{r_1}.$$

Dann gilt

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_\alpha}, L^{r_\alpha})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_0}, L^{r_0})}^{1-\alpha} \|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_1}, L^{r_1})}^\alpha.$$

Zur Beweis benötigen wir folgenden Satz und folgendes Lemma.

SATZ 1.16 (Hadamard, 3-Linien Satz). Sei  $a < b$  und  $f : \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b\} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und beschränkt. Weiter sei

$$M_a = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(a + it)|, \quad \text{und} \quad M_b = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(b + it)|.$$

Dann gilt:

$$|f(x + iy)| \leq M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}, \quad x + iy \in \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b\}.$$

PROOF. Wir betrachten  $f_\varepsilon(x + iy) = e^{\varepsilon(x+iy)^2} f(x + iy) M_a^{\frac{x+iy-b}{b-a}} M_b^{\frac{a-(x+iy)}{b-a}}$  für  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt  $|f_\varepsilon(a + iy)| \leq e^{\varepsilon a^2}$  und  $|f_\varepsilon(b + iy)| \leq e^{\varepsilon b^2}$  (Beachte:  $|a^{iy}| = 1$  für  $a > 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ). Außerdem gilt

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \sup_{a \leq x \leq b} |f_\varepsilon(x + iy)| = 0.$$

Mit dem Maximumprinzip für analytische Funktionen und ein hinreichend großes Rechteck folgt  $|f_\varepsilon(z)| \leq \max\{e^{\varepsilon a^2}, e^{\varepsilon b^2}\}$ . Aus  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  folgt die Behauptung. □

LEMMA 1.17. Sei  $p_0 < p < p_1$  und  $f = \sum \alpha_j a_j \chi_{E_j}$  eine Treppenfunktion mit  $\alpha_j \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha_j| = 1$ ,  $a_j > 0$  und  $\{E_j\}$  paarweise, disjunkte, mb. Mengen mit (jeweils) endlichem Maß. Weiter sei  $\|f\|_p = 1$  und

$$f_z = \sum \alpha_j a_j^{\frac{p}{p_z}} \chi_{E_j},$$

wobei  $p_z$

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

genügt. Dann gilt:

$$\|f_z\|_{L^{p_{\operatorname{Re} z}}} = 1, \quad 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1.$$

PROOF. Es gilt

$$\int |f_z(x)|^{p_{\operatorname{Re} z}} d\mu \stackrel{\text{Ü.A.}}{=} \sum |a_j|^p \mu(E_j) = \|f\|_p^p = 1.$$

□

BEWEIS V. THEOREM 1.15. Sei  $p = p_\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$  und betrachte Treppenfunktion  $f$  und  $f'$  auf  $M$ , welche  $\|f\|_p = \|f'\|_{p'} = 1$  erfüllen. Sei  $f_z$  und  $f'_z$  wie in Lemma 1.17, wobei  $f_z$  mit  $p_0$  und  $p_1$  und  $f'_z$  mit  $r_0$  und  $r_1$  konstruiert werden. Nach Voraussetzung ist

$$\Phi(z) := \int_M f'_z(x) T f_z(x) d\mu(x)$$

analytisch in  $z$ . Mit der Hölder-Ungleichung und Lemma 1.17 folgt nun:

$$|\Phi(j + iy)| \leq \|f'_z\|_{p'} M_j \|f_z\|_p \leq M_j, \quad j = 0, 1, \quad y \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\Phi(j + iy)| \leq M_j, \quad j = 0, 1.$$

Damit folgt mit dem 3-Linien Satz, dass

$$\left| \int f' T f \right| \leq M_0^{1-\alpha} M_1^\alpha.$$

Da Treppenfunktionen dicht in  $L^{p'}$  sind, erhalten wir  $\|Tf\|_p \leq M_0^{1-\alpha} M_1^\alpha$ . Die Behauptung folgt nun, da Treppenfunktionen auch in  $L^p$  dicht sind. □

## 2. $L_p$ Räume II

Im Folgenden sei  $\mu$  stets das Lebesgue-Maß und  $\Sigma$  die  $\sigma$ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

SATZ 2.1 (Faltung, Youngsche Ungleichung). Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt

$$(a) \text{ Für fast alle } x \in \mathbb{R}^d \text{ ist } y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

(b) *Setzt man*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, dy$$

so ist  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und es gilt

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

PROOF. Sei  $p = 1$ . Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \, dy \, dx \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, dx \, dy \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Für  $p = \infty$  liefert die Hölder-Ungleichung

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, dy \right| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty,$$

insbesondere existiert  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, dy$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Betrachte nun die Abbildung  $T_f g := f * g$ . Dann folgt aus dem Riesz-Thorin Konvexitätstheorem, dass  $T_f \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$  und  $\|T_f\|_{\mathcal{L}(L^p, L^p)} \leq \|f\|_1$  für  $1 \leq p \leq \infty$ , d.h. (b) gilt. Ferner erhalten wir mit Beppo-Levi

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)| \, dy \right)^p \, dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||\chi_{B(0,r)}g(y)| \, dy \right)^p \, dx \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|f\|_1 \|\chi_{B(0,r)}g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p, \end{aligned}$$

d.h.

$$\left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)| \, dy \right)^p < \infty, \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}^d.$$

□

BEISPIEL 2.2.

(a) *Betrachte die partielle Differentialgleichung*

$$(1 - \Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes  $f \in L^p$  eine eindeutige Lösung  $u$ . Desweiteren besitzt  $u$  die Darstellung

$$u(x) = (k * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einem Kern  $k \in L^1$ .

(b) Betrachte

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Dann existiert für jedes  $u_0 \in L^p$  eine eindeutige Lösung  $u$ . Desweiteren besitzt  $u$  die Darstellung

$$u(t, x) = (k_t * u_0)(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit  $k_t \in L^1$  für  $t > 0$ .

Im Folgenden benötigen wir den Raum der lokal integrierbaren Funktionen  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ . Genauer,

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \text{mb.} : \|f\|_{L^1(K)} < \infty \text{ für alle kp. } K \subset \mathbb{R}^d \right\}.$$

KOROLLAR 2.3. Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , dann definiert die Abbildung  $Tf := f * g$  einen stetigen linearen Operator auf  $L^p(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|T\| \leq \|f\|_1$ .

SATZ 2.4. Sei  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ . Dann  $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$ .

PROOF. Wegen

$$|(f * g)(x)| = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) \, dy \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

existiert  $(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) \, dy$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Sei  $x_n \rightarrow x$ . Wir zeigen  $(f * g)(x_n) \rightarrow (f * g)(x)$ . Setze

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y) \text{ und } F(y) = f(x - y)g(y),$$

dann gilt  $F_n(y) \rightarrow F(y)$  für fast alle  $y \in \mathbb{R}^d$ . Andererseits, sei  $K$  kompakt so, dass  $x_n - \text{supp } f \subseteq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann  $x_n - y \notin \text{supp } f$  falls  $y \notin K$ , d.h.  $f(x_n - y) = 0$  für  $y \notin K$ . Daher ist  $|F_n(y)| \leq \|f\|_\infty \chi_K(y) |g(y)|$  eine integrierbare Majorante. Nach dem Lebesgueschen Satz folgt  $\int F_n \, dy \rightarrow \int F \, dy$ .  $\square$

DEFINITION 2.5. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  messbar und setze

$$O_f := \left\{ x \in \Omega : \exists V \subset \Omega \text{ offene Umgebung von } x \text{ mit } f(x) = 0 \text{ für f.a. } x \in V \right\}$$

Dann heißt  $\text{supp } f := \Omega \setminus O_f$  der Träger von  $f$ .

SATZ 2.6. Sei  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ . Dann gilt

$$(5) \quad \text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$$

PROOF. Wegen  $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$  existiert  $(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) dy$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Also

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy = \int_{(x - \text{supp } f) \cap \text{supp } g} f(x - y)g(y) dy.$$

Falls  $x \notin \text{supp } f + \text{supp } g$ , gilt  $(x - \text{supp } f) \cap \text{supp } g = \emptyset$  und  $(f * g)(x) = 0$ .  $\square$

BEMERKUNG 2.7. Im Satz 2.6 gilt  $\overline{\text{supp } f + \text{supp } g} = \text{supp } f + \text{supp } g$ .

BEMERKUNG 2.8. Die obige Aussage (5) gilt auch für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

SATZ 2.9. Seien  $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ , und  $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g$ . Insbesondere  $f \in C_c^\infty$ ,  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d) \implies f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

PROOF. Wie immer existiert  $(f * g)(x)$  für alle  $x$ . Sei  $e_j \in \mathbb{R}^d$  ein Standardbasisvektor,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $|h| \leq 1$ . Setze  $K := \text{supp } f + \overline{B}(0, 1)$ , dies ist auch kompakt. Dann gilt (Differenzenquotient):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h}((f * g)(x + he_j) - (f * g)(x)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h}(f(x + he_j - y)g(y) - f(x - y)g(y)) dy = \\ &= \int_{K-x} \frac{1}{h}(f(x + he_j - y)g(y) - f(x - y)g(y)) dy, \end{aligned}$$

wobei der Integrand gegen  $D_j f(x - y)g(y)$  für alle  $y$  konvergiert. Außerdem gilt

$$\left| \frac{1}{h}(f(x + he_j - y)g(y) - f(x - y)g(y)) \right| \leq \|D_j f\|_\infty |g(y)| \chi_K(y).$$

Nach dem Satz von Lebesgue (Beachte:  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ ) bekommen wir  $D_j(f * g)(x) = ((D_j f) * g)(x)$ , und so die Behauptung.  $\square$

DEFINITION 2.10. Eine Folge  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  von Funktionen mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{ll} (a) \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d) & (c) \text{supp } \rho_n \subseteq B(0, 1/n) \\ (b) \rho_n \geq 0 & (d) \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1 \end{array}$$

heißt Mollifier.

BEISPIEL 2.11. Betrachte  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\text{supp}(\rho) \subseteq B(0, 1)$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\int \rho = 1$ , und definiere  $\rho_n(x) := 1/n^d \rho(nx)$ .

LEMMA 2.12. Sei  $f \in C(\mathbb{R}^d)$  und  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  ein Mollifier. Dann konvergiert  $\rho_n * f \rightarrow f$  gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$ .

PROOF. Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt. Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon$  für  $x \in K$  und  $|y| \leq \delta$ . Also

$$\begin{aligned} (\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) \rho_n(y) \, dy \\ &= \int_{B(0,1/n)} (f(x-y) - f(x)) \rho_n(y) \, dy, \end{aligned}$$

so für  $n > 1/\delta$  gilt  $|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$  für  $x \in K$ .  $\square$

LEMMA 2.13 (Urysohn,  $C^\infty$ -Version). Sei  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $K \subseteq \Omega$ ,  $K$  kompakt. Dann existiert ein  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $0 \leq \varphi \leq 1$  und  $\varphi(x) = 1$  für  $x \in K$ .

PROOF. Sei  $0 < 1/n < \varepsilon < \varepsilon + 1/n < \text{dist}(K, \Omega^c)$ . Setze  $U_\varepsilon := \{y \in \Omega : \text{dist}(y, K) < \varepsilon\} \subseteq \Omega$  und  $u = \chi_{U_\varepsilon}$ . Dann gilt  $\varphi := \rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  und  $\text{supp } \varphi \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + \overline{U_\varepsilon} \subseteq \Omega$ , also  $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega$  ist kompakt. Sei  $x \in K$ , dann  $\varphi(x) = \int_{|y| \leq 1/n} u(x-y) \rho_n(y) \, dy = \int_{|y| \leq 1/n} \rho_n(y) \, dy = 1$ . Ferner  $\|\varphi\|_\infty \leq \|\rho_n\|_1 \cdot \|u\|_\infty = 1$ . Da  $\varphi \geq 0$  folgt auch  $0 \leq \varphi \leq 1$ .  $\square$

BEMERKUNG 2.14. Sei  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und  $K \subset \Omega$  kompakt. Dann existiert  $V \subset \mathbb{R}^d$  offen mit  $\overline{V}$  kompakt und

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega.$$

PROOF. Sei  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  wie in Lemma 2.13 und setze

$$V := \{x \in \Omega; \varphi(x) > \frac{1}{2}\}.$$

$\square$

SATZ 2.15. Sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann ist  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

PROOF. Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Beh.:  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  Treppenfunktion  $T = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}$  mit  $A_i \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt und  $\|T - f\|_p \leq \varepsilon$ , bekannt aus der Maßtheorie.

Beh.:  $\forall \varepsilon > 0 \exists u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u - \chi_{A_i}\|_p \leq \varepsilon$ .

Wähle eine offene Menge  $O$  und eine kompakte Menge  $K$  mit  $K \subset A_i \subset O$  und  $|O \setminus K| \leq \varepsilon$  (Existenz: Maßtheorie). Dann existiert nach Lemma 2.13 ein  $\varphi \in C_c^\infty(O)$  mit  $\varphi \equiv 1$  auf  $K$ . Es gilt:

$$\int_O |\chi_{A_i} - \varphi|^p = \int_{O \setminus K} |\chi_{A_i} - \varphi|^p \leq 2^p |O \setminus K| \leq 2^p \varepsilon.$$

$\square$

SATZ 2.16. Sei  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  ein Mollifier.

(a) Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Dann  $\|\rho_n * f - f\|_p \rightarrow 0$ .

(b) Sei  $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$ . Dann  $\|\rho_n * f - f\|_\infty \rightarrow 0$



PROOF. (a) Nach Satz 2.15 existiert für  $\varepsilon > 0$  ein  $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|f - g\| \leq \varepsilon$ . Satz 2.6 liefert

$$\text{supp}(\rho_n * g) \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + \text{supp } g \subseteq K, \quad \text{wobei } K \text{ kompakt.}$$

Da nach Lemma 2.12  $\rho_n * g$  gleichmässig auf  $K$  gegen  $g$  konvergiert, existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\|\rho_n * g - g\|_p^p = \int_K |\rho_n * g - g|^p \leq \varepsilon^p |K|.$$

Daraus folgt mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\rho_n * f - f\|_p &\leq \|\rho_n * (f - g)\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \varepsilon + \varepsilon |K|^{\frac{1}{p}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Wiederhole den Beweis von Lemma 2.12.  $\square$

KOROLLAR 2.17. Sei  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $1 \leq p < \infty$ . Dann ist  $C_c^\infty(\Omega)$  dicht in  $L^p(\Omega)$ .

PROOF. Setze  $\Omega_n := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\}$  und

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \Omega_n \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt nach dem Satz von Lebesgue  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ , d.h. für  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_0$  mit  $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$ .

Setze  $g_m := \rho_m * f_n$ , wobei  $\rho_m$  ein Mollifier ist. Dann existiert nach Satz 2.16 ein  $m_0 > n_0$  mit  $\|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon$ ,  $m \geq m_0$ . Des Weiteren gilt

$$\text{supp } g_m = \text{supp } \rho_m + \text{supp } f_{n_0} \subset \Omega, \quad m \geq m_0.$$

Damit erhalten wir

$$\|g_m - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\Omega)} + \|f_{n_0} - f\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon, \quad m \geq m_0. \quad \square$$

SATZ 2.18 (Zerlegung der Eins). Seien  $\Omega, \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Seien ferner

$$K_i \subset \Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset \Omega, \quad i \in \mathbb{N},$$

mit  $K_i, \overline{\Omega}_i$  kompakt und

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i = \Omega,$$

so, dass für alle  $x \in \Omega$  eine Umgebung  $U(x)$  existiert, welche nur endlich viele  $\Omega_j$  trifft (diese Überdeckung heißt lokal endlich). Nehmen wir ferner an, dass  $K_j \cap K_i = \emptyset$ , falls  $i \neq j$ .

Dann existieren  $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  mit

- (a)  $\varphi_i \geq 0$
- (b)  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x) = 1$ , falls  $x \in \Omega$
- (c)  $\text{supp } \varphi_i \subset \Omega_i$

$$(d) 0 \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i \leq 1.$$

Außerdem gilt  $\varphi_j(x) = 1$  für  $x \in K_j$ .

PROOF. 1. Schritt: Nehmen wir an dass wir die folgende Situation haben

$$K_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$$

wobei  $\overline{V}_j$  kompakt,  $U_i \cap K_j = \emptyset$  falls  $i \neq j$  und  $V_j, U_j$  sind lokal endliche Überdeckungen von  $\Omega$ . Wähle  $\varphi'_j$  nach Lemma 2.13 zu  $U_j$  und  $\overline{V}_j$ . Dann gilt  $\varphi(x) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi'_i(x) > 0$ , wobei lokal in  $\Omega$  nur endlich viele Summanden von 0 verschieden sind. Setze  $\varphi_j(x) := \varphi'_j(x)/\varphi(x)$ . Nach Konstruktion haben die  $\varphi_j$  die gewünschte Eigenschaften.

2. Schritt, Disjunktisierung von  $\Omega_j$  und  $K_j$ :  $U_j := \Omega_j \setminus \bigcup_{i \neq j} K_i$ . Natürlich gilt  $K_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$ . Wir behaupten, dass  $U_j$  offen ist. Sei  $x \in U_j$  und  $U(x) \subseteq \Omega_j$  eine Umgebung von  $x$  so, dass  $J := \{i : \Omega_i \cap U(x) \neq \emptyset\}$  endlich ist. Für  $j \neq k \in J$  existiert eine Umgebung  $W_k(x) \subseteq U(x)$  von  $x$  mit  $W_k(x) \cap K_k = \emptyset$ . Setze  $W(x) := \bigcap_{k \in J} W_k(x)$ , die ist eine Umgebung von  $x$  mit  $W(x) \subseteq U_j$  und  $W(x) \cap K_i = \emptyset$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$ , also  $U_j$  ist offen. Sei jetzt  $x \in \Omega$ , liegt dann  $x \in \Omega_j$  für ein  $j$ , dann liegt es entweder in  $U_j$  oder in  $K_i$  für ein  $i \neq j$ . Die Überdeckung  $U_j$  ist lokal endlich, da  $\Omega_j$  lokal endlich ist.

3. Schritt, Konstruktion von  $V_j$ : Sei  $V_1 := U_1$ . Angenommen  $V_j$ ,  $j < n$  konstruiert ist mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j = \Omega,$$

sei  $F_n$  eine abgeschlossene Umgebung von  $\partial U_n$  die erfüllt

$$\partial U_n \subseteq F_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Solche eine Umgebung existiert nach Bemerkung 2.14. Falls  $U_n \neq \emptyset$ , können wir eine kleinere Umgebung  $\partial U_n \subseteq F'_n \subseteq F_n$  finden damit  $U_n \setminus F'_n$  nichtleer wird. Setze  $V_n := U_n \setminus F'_n$ . Dann

$$U_n \subseteq V_n \cup F'_n \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Also  $V_j$  ist eine offene Überdeckung, die natürlich lokal endlich bleibt.  $\square$

SATZ 2.19 (Zerlegung der Eins). Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ , mit  $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Dann existiert  $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$  mit

- (a)  $\varphi_i \geq 0$
- (b)  $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$ , falls  $x \in K$
- (c)  $0 \leq \sum_{i=1}^n \varphi_i \leq 1$ .
- (d)  $\text{supp } \varphi_j \subseteq \Omega_j$

PROOF. Wähle  $V$  mit  $\bar{V}$  kompakt und

$$K \subset V \subset \bar{V} \subset \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$$

nach Bemerkung 2.14. Setze  $U_i := V \cap \Omega_i$  und verwende Satz 2.18  $\square$

BEMERKUNG 2.20. Das System  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  heißt der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins zu  $K$ .

### 3. Sobolev Räume I.

In diesem Abschnitt es sei  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt.

DEFINITION 3.1 (Distributionelle Ableitung). Sei  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Falls die Identität

$$\int_{\Omega} f D^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

gilt, heißt  $TG$  die distributionelle Ableitung von  $f$ , und wir schreiben  $D^{\alpha} f = g$ ,  $f^{(\alpha)} = g$  oder  $f = \partial^{\alpha} g$ .

BEMERKUNG 3.2.

(a) Die distributionelle Ableitung ist eindeutig, insbesondere ist die obige Definition sinnvoll, denn

$$\int_{\Omega} (f - g) \varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega) \implies f - g = 0 \text{ fast überall.}$$

(b) Falls  $f \in C^m(\Omega)$ . Dann für jede  $|\alpha| \leq m$  ist  $D^{\alpha} f$  die klassische partielle Ableitung von  $f$ .

DEFINITION 3.3. Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p \leq \infty$ . Definiere

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq m \exists D^{\alpha} f \in L^p(\Omega)\}$$

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} f\|_{L^p(\Omega)}.$$

SATZ 3.4.  $W^{m,p}(\Omega)$  ist ein Banachraum.

PROOF. Klar: normierter Vektorraum. Um die Vollständigkeit zu zeigen, nehme  $(f_n) \in W^{m,p}(\Omega)$  eine Cauchyfolge, d.h. die Folgen  $(D^{\alpha} f_n) \subseteq L^p(\Omega)$  sind alle Cauchyfolgen. Daher konvergieren die auch, bezeichne die Grenzwerte mit  $f_{\alpha}$ . Wir zeigen nun  $D^{\alpha} f = f_{\alpha}$ :

$$\int_{\Omega} f_{\alpha} \varphi \leftarrow \int_{\Omega} D^{\alpha} f_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_n D^{\alpha} \varphi \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^{\alpha} \varphi.$$

Die Behauptung folgt.  $\square$

SATZ 3.5. Sei  $1 < p < \infty$ . Dann ist  $W^{m,p}(\Omega)$  separabel und reflexiv.  $W^{m,1}(\Omega)$  ist separabel.

PROOF. Definiere die stetige Abbildung

$$J : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \underbrace{L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)}_M =: X,$$

wobei  $M =$  die Anzahl der Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$  ist, durch  $(Jf)(x) := (D^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}$ . Dann ist  $J$  stetig invertierbar, bildet also auf einen abgeschlossenen Unterraum von  $X$  ab. Falls  $1 \leq p < \infty$  ist, ist  $X$  separabel, ist zusätzlich  $p > 1$ , folgt die Reflexivität von  $X$ .  $\square$

LEMMA 3.6 (Lokale Approximation). Sei  $1 \leq p < \infty$ ,  $f \in W^{m,p}(\Omega)$  und  $D \subseteq \Omega$  offen mit  $\overline{D} \subseteq \Omega$ . Betrachte  $\delta = \text{dist}(D, \partial\Omega) > 0$  und den Mollifier  $\eta_\varepsilon$ ,  $\varepsilon < \delta$ . Setze  $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)$ . Dann  $f_\varepsilon \rightarrow f$  in  $W^{m,p}(D)$ .

PROOF.

$$\begin{aligned} D^\alpha f_\varepsilon(x) &= D^\alpha \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)(x) = \int_{\Omega} D^\alpha (\eta_\varepsilon(x-y)) f(y) \, dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \, dy \stackrel{\text{Träger!}}{=} \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha f(y) \, dy \\ &= (D^\alpha f)_\varepsilon(x), \quad x \in D. \end{aligned}$$

Also  $f_\varepsilon \in W^{m,p}(D)$  und nach Satz 2.16  $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha f)_\varepsilon \rightarrow D^\alpha f$ .  $\square$

SATZ 3.7. Für  $1 \leq p < \infty$  ist  $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$  dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$ .

PROOF. Betrachte eine lokal endliche Überdeckung  $\Omega_k$  von  $\Omega$ ,  $\overline{\Omega_k} \subseteq \Omega$  kompakt (siehe Satz 2.18). Sei  $\varphi_k$  Zerlegung der Eins,  $\varepsilon > 0$  und  $c_k > 0$  später noch zu bestimmen. Für  $\varepsilon > 0$  existiert nach Lemma 3.6  $f_{k,\varepsilon} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega_k)$  mit  $\|f - f_{k,\varepsilon}\|_{W^{m,p}(\Omega_k)} \leq c_k \varepsilon$ . Setze

$$f_\varepsilon := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k f_{k,\varepsilon}, \quad \text{also } f_\varepsilon - f := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k (f_{k,\varepsilon} - f)$$

(lokal nur endlich viele Summanden). Die Produktregel gilt, denn für  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \varphi_k f D_i \psi = \int_{\Omega} (D_i(\varphi_k \psi) - (D_i \varphi_k) \psi) f = - \int_{\Omega} ((\varphi_k \psi) D_i f + \psi f D_i \varphi_k).$$

Daher ist  $\varphi_k f \in W^{1,p}(\Omega)$ ,

$$D_i(\varphi_k f) = D_i \varphi_k \cdot f + \varphi_k D_i f.$$

Ferner gilt induktiv auch  $\varphi_k f \in W^{m,p}(\Omega)$ , und für  $|\alpha| \leq m$

$$D^\alpha(\varphi_k f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \varphi_k \cdot D^\beta f.$$

Wir erhalten

$$D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k \in \mathbb{N}} D^{\alpha-\beta} \varphi_k (D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f).$$

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} &\leq C \sum_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{C^m(\bar{\Omega})} \|D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C\varepsilon \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \|\varphi_k\|_{C^m(\bar{\Omega})} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

falls  $c_k \leq 2^{-k}(\|\varphi_k\|_{C^m(\bar{\Omega})} + 1)^{-1}/C$ .  $\square$

**SATZ 3.8 (Produktregel).** Sei  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und  $f \in W^{m,p}(\Omega)$ ,  $g \in W^{m,q}(\Omega)$ . Dann  $fg \in W^{m,1}(\Omega)$  und  $D_i(fg) = D_i f \cdot g + f D_i g$ .

**PROOF.** Sei  $p < \infty$ . Nehme  $f_k \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$  mit  $f_k \rightarrow f$ . Wir haben gesehen  $D_i(f_k g) = D_i f_k \cdot g + f_k D_i g$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_i \varphi \cdot fg &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} D_i \varphi \cdot f_k g = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi D_i(f_k g) \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi (D_i f_k \cdot g + f_k D_i g) = - \int_{\Omega} \varphi (D_i f \cdot g + f D_i g). \end{aligned}$$

Der Rest folgt mit Induktion.  $\square$

**SATZ 3.9 (Kettenregel).** Seien  $\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen, und  $\Phi : \Omega' \rightarrow \Omega$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen  $D\Phi, D\Phi^{-1}$ . Sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt für  $f \in W^{1,p}(\Omega)$ :

- (a)  $f \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega')$ .
- (b)  $\partial(f \circ \Phi) = \partial f \circ \Phi \cdot \partial\Phi$ .

**PROOF.** Ü.A.  $\square$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen,  $1 \leq p < \infty$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} W_0^{m,p}(\Omega) &:= \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}, \\ W_0^{m,p}(\Omega)_+ &:= \{u \in W_0^{m,p} : u \geq 0 \text{ f.ü.}\}, \\ C_c^\infty(\Omega)_+ &:= \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \varphi \geq 0\}. \end{aligned}$$

und

$$f^+ = \chi_{f>0} f, \quad f^- = \chi_{f<0} f, \quad f \in L^p(\Omega).$$

**LEMMA 3.10.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

- (a)  $D_j f^+ = \chi_{f>0} D_j f$ ,  $D_j f^- = -\chi_{f<0} D_j f$  fuer  $f \in W^{1,2}(\Omega)$
- (b)  $f \mapsto |f|$ ,  $f^+$ ,  $f_- : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{1,2}(\Omega)$  stetig.
- (c)  $C_c^\infty(\Omega)_+$  dicht in  $W_0^{1,2}(\Omega)_+$ .
- (d) Sei  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ,  $\text{supp}(u) \subset\subset \Omega$ , d.h. es existiert ein offenes  $D \subset \Omega$  mit  $\text{supp } u \subset D \subset \bar{D} \subset \Omega$ . Dann ist  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

**PROOF.** Ü.A.  $\square$

SATZ 3.11. Sei  $I \neq \emptyset$  ein offenes Intervall und  $f \in W^{1,1}(I)$ . Dann existiert eine Nullmenge  $N$  so, dass für  $x, y \in I \setminus N$

$$(6) \quad f(y) - f(x) = \int_x^y f'(z) \, dz$$

gilt.

PROOF. Sei  $f \in W^{1,1}(I)$  und  $f_k \in C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$  mit  $f_k \rightarrow f$  in  $W^{1,1}(I)$ . Dann gilt

$$f_k(y) - f_k(x) = \int_x^y f'_k(z) \, dz \rightarrow \int_x^y f'(z) \, dz.$$

Da  $f_k$  in  $L^1(I)$  konvergiert, besitzt sie eine punktweis fast überall konvergente Teilfolge, also  $\lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}(z) = f(z)$  für fast alle  $z \in I$ .  $\square$

SATZ 3.12. Sei  $I \neq \emptyset$  ein offenes Intervall und  $f, g \in L^1(I)$  mit

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(z) \, dz \quad \text{für } x, y \in I \setminus N,$$

für eine Nullmenge  $N$ . Dann ist  $f \in W^{1,1}(I)$  und  $f' = g$ .

PROOF. Sei  $\psi \in C_c^\infty(I)$ , und  $c, d \in I$  so, dass  $\text{supp } \psi \subset [c, d]$  und  $f(y) - f(c) = \int_c^y g(z) \, dz$  für fast alle  $y \in I$ . Dann

$$\begin{aligned} \int_c^d \psi'(y)(f(y) - f(c)) \, dy &= \int_c^d \int_c^y \psi'(y)g(x) \, dx \, dy = \int_c^d \int_x^d \psi'(y) \, dy g(x) \, dx \\ &= - \int_c^d \psi(x)g(x) \, dx. \end{aligned}$$

$\square$

SATZ 3.13. Sei  $f \in W^{1,1}(I)$ . Dann existiert ein  $g \in C(\bar{I})$  so, dass  $f = g$  fast überall.

PROOF. Sei  $I = (a, b)$ . Definiere  $h(y) := \int_a^y f'(z) \, dz$ . Die Funktion  $h$  ist stetig auf  $I$ , denn  $f' \in L^1(I)$ . Außerdem existiert  $\lim_{x \rightarrow a, b} h(x)$ , also  $h \in C(\bar{I})$ . Seien  $x, z$  so, dass  $f(z) - f(x) = \int_x^z f'(z) \, dz$ . Sei  $c := f(z) - h(z)$  und setze  $g(y) := h(y) + c$ . Nach Definition  $f'(x) = g(x)$  für fast alle  $x \in I$ .  $\square$

BEMERKUNG 3.14. Die obige Integralgleichung impliziert nicht nur Stetigkeit, sondern auch Absolutstetigkeit. Genauer ist Absolutstetigkeit äquivalent zu (6) (vgl. Maßtheorie).

SATZ 3.15. *Es sei  $1 \leq p \leq \infty$  und  $I = (a, b)$ . Dann sind die Einbettungen  $W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$  stetig. Falls  $p > 1$ , ist die Einbettung  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$  kompakt.*

PROOF. Es ist klar, dass die Einbettungen

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I)$$

stetig sind.

Es bleibt zu zeigen, dass  $W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$  stetig ist. Sei  $f \in W^{1,1}(I)$ . Nach Satz 3.11 existiert eine Nullmenge  $N$  mit

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt, \quad x, y \in I \setminus N.$$

Dann gilt

$$|f(y)| = \left| f(x) + \int_x^y f' \right| \leq |f(x)| + \int_x^y |f'| \leq |f(x)| + \|f'\|_{L^1(I)}.$$

Integration bzgl.  $x$  über  $I$  liefert

$$(b-a)|f(y)| \leq \int_I |f(y)| dx \leq \|f\|_{L^1(I)} + (b-a)\|f'\|_{L^1(I)}, \quad y \in I \setminus N,$$

d.h.  $\|f\|_{L^\infty(I)} \leq C\|f\|_{W^{1,1}(I)}$ . Da  $C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$  dicht in  $W^{1,1}(I)$  ist, folgt die Behauptung (Beachte: für  $f \in C(\bar{I})$  gilt  $\|u\|_{L^\infty(I)} = \|u\|_\infty$ ).

Nun sei  $p > 1$  und  $x, y \in I$  mit  $x > y$ . Dann gilt mit  $1/p + 1/p' = 1$

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)|^p &\leq \left( \int_x^y |f'| \right)^p \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (x-y)^{p/p'} \int_x^y |f'|^p \leq (x-y)^{p/p'} \int_a^b |f'|^p \\ &\leq (x-y)^{p/p'} \|f\|_{W^{1,p}(I)}^p, \end{aligned}$$

d.h.

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{W^{1,p}(I)}, \quad f \in W^{1,p}(I).$$

Also ist  $B_{W^{1,p}(I),1}(0) \subset C(I)$  gleichmäßig gleichgradig stetig. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Arzelà–Ascoli.  $\square$

#### 4. Sobolev Räume II. – Einbettungssätze

SATZ 4.1. *Für  $1 \leq p < \infty$  ist der Raum  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ .*

PROOF. Seien  $\varepsilon > 0$ ,  $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$  und  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\text{supp } \psi \subseteq B(0,2)$  und  $\psi(x) = 1$  für  $x \in \overline{B(0,1)}$ . Setze  $\psi_j(x) := \psi(x/j)$ .

Beh.  $\psi_j f \rightarrow f$  in  $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ .

Die Produktregel (Satz 3.8) liefert

$$|D^\alpha(\psi_j f - f)| \leq C \sum_{\beta \leq \alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)| \cdot |D^{\alpha-\beta} f|,$$

also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha(\psi_j f - f)|^p &\leq C' \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\beta \leq \alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\ &= C' \sum_{\beta \leq \alpha_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,j)}} \int_{B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\ &\quad + C' \sum_{\beta \leq \alpha_{B(0,j)}} \int_{B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\ &= C' \sum_{\beta \leq \alpha_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,j)}} \int_{B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\ &\leq C'' \sum_{\beta \leq \alpha_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,j)}} \int_{B(0,j)} |D^{\alpha-\beta} f|^p \leq \varepsilon^p, \end{aligned}$$

falls  $j$  groß genug ist.

Nun betrachten wir einen Mollifier  $(\rho_n)$ . Dann hat  $\rho_n * \psi_j f$  kompakten Träger und ist glatt. Nach Satz 2.9 und 2.16 gilt  $D^\alpha(\rho_n * (\psi_j f)) = \rho_n * D^\alpha(\psi_j f) \rightarrow D^\alpha \psi_j f$  für  $n \rightarrow \infty$ . Sei also erst  $j$  groß und dann  $n$  genügend groß, so dass

$$\|f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f - \psi_j f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \|\psi_j f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

□

SATZ 4.2. Sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

mit stetiger Einbettung, d.h. für eine Konstante  $C_p$

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

PROOF. Sei  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  und  $1 \leq p < \infty$ . Setze  $G(s) := |s|^{p-1}s$ . Dann gilt  $\psi := G(\varphi) \in C_c^1(\mathbb{R})$  und  $\psi' = G'(\varphi)\varphi' = p|\varphi|^{p-1}\varphi'$ . Also erhalten wir für  $x \in \mathbb{R}$

$$G(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^x p|\varphi(t)|^{p-1}\varphi'(t) dt.$$

Nach der Hölderschen Ungleichung folgt

$$|G(\varphi(x))| = |\varphi(x)|^p \leq p \|\varphi\|_p^{p-1} \|\varphi'\|_p$$

und

$$|\varphi(x)| \leq C \|\varphi\|_p^{(p-1)/p} \|\varphi'\|_p^{1/p}.$$



Die Youngsche Ungleichung liefert

$$(7) \quad |\varphi(x)| \leq C \frac{p-1}{p} \|\varphi\|_p + C \frac{1}{p} \|\varphi'\|_p \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}.$$

Sei nun  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . Nach Satz 4.1 existiert  $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ . Mit (7) ist dann  $u_n$  eine Cauchyfolge in  $L^\infty(\mathbb{R})$  und die Behauptung folgt.  $\square$

LEMMA 4.3. Sei  $d \geq 2$  und  $f_1, \dots, f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$ . Für  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $1 \leq i \leq d$  setze

$$\tilde{x}_i := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$$

und sei

$$f(x) = f_1(\tilde{x}_1) f_2(\tilde{x}_2) \cdots f_d(\tilde{x}_d) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

PROOF. Ü.A.  $\square$

THEOREM 4.4 (Sobolev). Sei  $1 \leq p < d$ . Dann ist die Einbettung

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^d), \quad \text{mit } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$$

stetig und es existiert  $C = C_{p,d}$  mit

$$\|f\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla f\|_{L^p} \quad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

PROOF. 1. Schritt:  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ .

Sei  $1 \leq i \leq d$ .

$$\begin{aligned} |u(x_1, x_2, \dots, x_d)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) \right| dt \\ &:= f_i(\tilde{x}_i). \end{aligned}$$

Also  $\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ .

Es gilt  $|u(x)|^d \leq \prod_{i=1}^d |f_i(\tilde{x}_i)|$ . Mit Lemma 4.3 folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d |f_i(\tilde{x}_i)|^{\frac{1}{d-1}} dx \leq \prod_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d-1}}.$$

Das heißt

$$(8) \quad \|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}}.$$

Wir wenden (8) auf  $|u|^t$ ,  $t > 1$  anstatt auf  $u$  an. Also, mit  $1/p + 1/p' = 1$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{td}{d-1}}(\mathbb{R}^d)}^t &= \left( \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{td}{d-1}}(x) \, dx \right)^{\frac{d-1}{d}} \leq \prod_{i=1}^d \left\| |u|^{t-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \\ &\leq t \prod_{i=1}^d \left\| |u|^{t-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \leq t \|u\|_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^d)}^{t-1} \prod_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}}. \end{aligned}$$

Wähle nun  $t$  so dass  $\frac{td}{d-1} = p'(t-1)$ , d.h.  $t = \frac{d-1}{d}p^*$  (dann  $t \geq 1$ ). Jetzt durch dividieren durch  $\|u\|_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^d)}^{t-1}$  bekommen wir

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq t \prod_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

die Behauptung für  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ .

*2. Schritt:* Sei  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ . Nach Satz 4.1 wähle  $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $u_k \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ . Dann  $\|u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ . Dies zeigt auch dass  $u_k$  eine Cauchyfolge in  $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$  ist, deshalb ist sie konvergent. Eine Teilfolge konvergiert dann fast überall, benutzen wir die selbe Bezeichnung  $u_k(x) \rightarrow u(x)$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Also  $u_k \rightarrow u$  in  $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ , und  $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ .  $\square$

**BEMERKUNG 4.5.** *Es genügt  $C_{p,d} := \frac{(d-1)p}{d-p}$ . Die optimale Konstante ist bekannt aber kompliziert.*

**SATZ 4.6.** *Sei  $1 \leq p < d$ . Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d), \quad r \in [p, p^*]$$

*stetig.*

**PROOF.** Sei  $p \leq r \leq p^*$ . Für ein  $\theta$  gilt  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$ . Verwende dann die Interpolationsungleichung, die Youngsche Ungleichung und Theorem 4.4

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^\theta \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \leq \theta \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + (1-\theta) \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C' \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

$\square$

**THEOREM 4.7 (Morrey).** *Es sei  $p > d$ . Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

stetig. Ferner existiert ein  $C := C_{d,p}$  so, dass für alle  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\theta \|\nabla f\|_{L^p} \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei  $\theta = 1 - \frac{d}{p}$ .

PROOF. 1. Schritt: Sei  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ . Sei  $Q$  ein abgeschlossener Würfel  $0 \in Q$  mit Seitenlänge  $r$ . Sei  $x \in Q$ , dann  $u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx) dt$ . Daraus

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| |x_i| dt \leq r \sum_{i=1}^d \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt.$$

Sei  $\bar{u} = |Q|^{-1} \int_Q u(x) dx$ . Dann  $|\bar{u} - u(0)| \leq |Q|^{-1} \int_Q |u(x) - u(0)|$ , und

$$\begin{aligned} |\bar{u} - u(0)| &\leq \frac{r}{|Q|} \int_Q \int_0^1 \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt dx = \frac{r}{r^d} \int_0^1 \int_Q \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dx dt \\ &= \frac{1}{r^{d-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^d \int_{tQ} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| dy \cdot \frac{1}{t^d} dt \\ &\leq \frac{1}{r^{d-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^d \left( \int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right|^p dy \right)^{1/p} |tQ|^{1/q} \cdot \frac{1}{t^d} dt \\ &\leq \frac{1}{r^{d-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{d/q} \int_0^1 \frac{t^{d/q}}{t^d} dt = \frac{r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}. \end{aligned}$$

Natürlich können wir das ganze für  $x$  anstatt für  $0$  wiederholen und auch  $Q$  verschieben, also

$$(9) \quad |\bar{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \quad \text{für } x \in Q.$$

Daraus

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - \bar{u}| + |\bar{u} - u(y)| \leq \frac{2r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \quad \text{für } x, y \in Q.$$

Sei nun  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Es existiert ein Würfel  $Q$  der Seitenlänge  $r = 2|x - y|$  mit  $x, y \in Q$ .

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{C|x - y|^\theta}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

2. Schritt: Sei  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ . Approximiere mit  $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ , d.h.  $u_k \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ . Wie im Beweis von Theorem 4.4 folgt

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{C|x - y|^\theta}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

3. *Schritt:* Wir zeigen  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Sei  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $Q \ni x$  der Einheitswürfel. Aus (9) folgt

$$|u(x)| \leq |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq \|u\|_{L^p(Q)} + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq C_{d,p}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Schließlich approximiere  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  mit  $u_k \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ .  $\square$

SATZ 4.8 (Der Fall  $p = d$ ). *Die Einbettung*

$$W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d), \quad q \in [d, \infty)$$

*ist stetig.*

PROOF. Ohne Beweis.  $\square$

KOROLLAR 4.9. *Sei  $m \in \mathbb{N}$  ( $m \geq 1$ ) und  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt*

- (a)  $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \implies W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$  mit  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$
- (b)  $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \implies W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$  für alle  $r \in [p, \infty)$   $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$
- (c)  $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \implies W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

*jeweils mit stetiger Einbettung.*

- (a) Sei  $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$ ,  $m - d/p \notin \mathbb{N}$ . Setze

$$k := \left[ m - \frac{d}{p} \right] \quad \text{und} \quad \theta := m - \frac{d}{p} - k, \quad 0 < \theta < 1$$

$\implies$  für jede  $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$  es existiert  $C$  mit

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{W^{m,p}} \quad \forall |\alpha| \leq k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}} |x - y|^\theta \quad \text{fast alle } x, y \in \mathbb{R}^d, |\alpha| = k.$$

*Insbesondere gilt*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^d)$$

*mit stetiger Einbettung.*

PROOF. ÜA.  $\square$

### 5. Sobolev Räume III. - Gebiete

NOTATION 5.1. *Sei  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dann  $x = (x', x_d)$  mit  $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$ . Wir setzen*

$$\mathbb{R}_+^d := \{x = (x', x_d) : x_d > 0\}$$

$$Q := \{x = (x', x_d) : |x'| < 1 \text{ und } |x_d| < 1\}$$

$$Q_+ := Q \cap \mathbb{R}_+^d$$

$$Q_0 := \{x = (x', x_d) : |x'| < 1 \text{ und } x_d = 0\}$$

DEFINITION 5.2. *Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Dann heißt  $\Omega$  von der Klasse  $C^m$ , falls eine lokal endliche Überdeckung  $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  des Randes  $\partial\Omega$  und bijektive Abbildungen  $\Phi_j : Q \rightarrow U_j$  existieren, so dass  $\Phi_j, \Phi_j^{-1}$   $m$ -fach stetig differenzierbar mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen sind und  $\Phi_j(Q_+) = U_j \cap \Omega$  und  $\Phi_j(Q_0) = U_j \cap \partial\Omega$  gelten.*

SATZ 5.3 (Fortsetzungsoperator). Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  beschränkt und von der Klasse  $C^m$  oder  $\Omega = \mathbb{R}_+^d$ . Dann existiert für  $1 \leq p \leq \infty$  ein linearer Operator  $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ , so dass für alle  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  mit  $k \leq m$  gilt

- (a)  $Fu|_{\Omega} = u$ ,  
(b)  $\|Fu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\Omega} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ .

BEWEISIDEE FÜR  $m = 1$  UND  $\Omega$  BESCHRÄNKT: Nach Voraussetzung kann man  $\bar{\Omega}$  mit  $U_0 = \Omega$  und endlich vielen  $U_l$  überdecken. Die zugehörigen bijektiven Abbildungen bezeichnen wir wieder mit  $\Phi_l$ . Betrachte eine dieser Überdeckungen untergeordnete Zerlegung der Eins  $(\varphi_l)$ . Die Funktionen  $\varphi_l f$  (eingeschränkt auf  $\Omega \cap U_l$ ) liegen in  $W^{1,p}(\Omega \cap U_l)$ . Sei einfach

$$\tilde{f}_0(x) := \begin{cases} g_0(x) & x \in U_0 \\ 0 & x \notin U_0 \end{cases}.$$

Für  $l > 0$  definiere  $g_l := (\varphi_l f) \circ \Phi_l$ . Dann gehört  $g_l$  zu  $W^{1,p}(Q_+)$  nach Satz 3.9. Setze  $g_l$ ,  $l > 0$  auf  $Q$  so fort:

$$\tilde{g}_l((x', x_d)) := \begin{cases} g_l((x', x_d)) & (x', x_d) \in Q_+ \\ g_l((x', -x_d)) & (x', x_d) \notin Q_+ \cup Q_0. \end{cases}$$

Es gilt  $\tilde{g}_l \in W^{1,p}(Q)$  und  $\|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C \|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}$  (dies ist noch zu beweisen!). Jetzt sei  $\tilde{f}_l := \tilde{g}_l \circ \Phi_l^{-1}$ . Dann gilt  $\tilde{f}_l|_{\Omega \cap U_l} = (\varphi_l f)|_{\Omega \cap U_l}$  und  $\tilde{f}_l$  ist null außerhalb von  $\Phi_l^{-1}(Q)$ . Betrachte jedes  $\tilde{f}_l$  als eine Funktion definiert auf  $\mathbb{R}^d$  (0 außerhalb  $U_l$ ). Dann  $\tilde{f}_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ , also liegt die Funktion

$$\tilde{f} = \sum_{l=0}^N \tilde{f}_l$$

auch in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  und sie ist eine Fortsetzung von  $f$  (nach Konstruktion). Die folgenden Abschätzungen gelten für  $l > 0$ :

$$\begin{aligned} \|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} &\leq C \|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(\Omega \cap U_l)}, & \|g_l\|_{L^p(Q_+)} &\leq C \|\varphi_l f\|_{L^p(\Omega \cap U_l)} \\ \|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} &\leq C \|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}, & \|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)} &\leq C \|g_l\|_{L^p(Q_+)} \\ \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} &\leq C \|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)}, & \|\tilde{f}_l\|_{L^p(U_l)} &\leq C \|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $C$  nur von  $\Omega$ , von der Überdeckung und von den zugehörigen Funktionen  $\Phi_l$  abhängt. Also

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} &\leq \sum_{l=0}^N \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \sum_{l=0}^N \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} \leq C' \sum_{l=0}^N \|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(U_l \cap \Omega)} \\ &\leq C'' \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Analog folgt die Abschätzung im Fall  $k = 0$ . □

SATZ 5.4 (Dichtheit). Sei  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  beschränkt und von der Klasse  $C^m$ . Sei  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  wobei  $1 \leq p < \infty$ . Dann existiert eine Folge  $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $u_n|_\Omega \rightarrow u$  in  $W^{m,p}(\Omega)$ , d.h. die Menge

$$\{u|_\Omega : u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\}$$

ist ein dichter Unterraum von  $W^{m,p}(\Omega)$ .

PROOF. Sei  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  und betrachte  $Fu$ . Satz 4.1 liefert eine Folge  $(v_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - Fu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Die Folge  $u_n := v_n|_\Omega$  hat die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

KOROLLAR 5.5. Sei  $m \in \mathbb{N}$  ( $m \geq 1$ ),  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  beschränkt von der Klasse  $C^m$  oder  $\Omega = \mathbb{R}_+^d$  und  $1 \leq p < \infty$ . Dann gelten die folgende Aussagen

- (a)  $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \implies W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$  mit  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$ ,
- (b)  $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \implies W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$  für alle  $r \in [d, \infty)$ ,
- (c)  $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \implies W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

- (a) Sei  $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$ ,  $m - d/p \notin \mathbb{N}$ . Setze

$$k := \left[ m - \frac{d}{p} \right] \quad \text{und} \quad \theta := m - \frac{d}{p} - k, \quad 0 < \theta < 1$$

$\implies$  für jede  $f \in W^{m,p}(\Omega)$ . Dann existiert  $C$  mit

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \text{für alle } |\alpha| \leq k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} |x - y|^\theta \quad \text{für fast alle } x, y \in \Omega, |\alpha| = k.$$

Insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$$

mit stetiger Einbettung.

PROOF. Ü.A.  $\square$

SATZ 5.6 (Charakterisierungen von Sobolev Funktionen). Es sei  $f \in L^p(\Omega)$  mit  $1 < p \leq \infty$ . Äquivalent sind

- (a)  $f \in W^{1,p}(\Omega)$
- (b) Es existiert  $C > 0$

$$\left| \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}, \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega), i = 1, \dots, d.$$

- (c) Es existiert ein  $C > 0$ , so dass für jedes  $\Omega' \subset \Omega$  mit  $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$  und für alle  $h \in \mathbb{R}^d$  mit  $|h| < \text{dist}(\Omega', \Omega^c)$  gilt

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} \leq C|h|.$$

BEMERKUNG 5.7. Es kann  $C = \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$  gewählt werden.

Falls  $p = 1$ , so gilt (a)  $\implies$  (b)  $\iff$  (c)

PROOF. ÜA. □

SATZ 5.8. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen,  $1 \leq p < \infty$  und  $M \subseteq L^p(\Omega)$  beschränkt. Es gelte

(a) für alle  $\varepsilon > 0$  und  $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$  existiert ein  $0 < \delta < \text{dist}(\Omega', \Omega^c)$  mit

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^d \text{ mit } |h| < \delta \text{ und für alle } f \in M,$$

wobei  $(\tau_h f)(x) = f(x + h)$ .

(b) für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\Omega' \subseteq \Omega$  mit  $\overline{\Omega'}$  kompakt in  $\Omega$ , so dass

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in M.$$

Dann ist  $M$  relativ kompakt in  $L^p(\Omega)$ .

PROOF. (Skizze). Wir betrachten zunächst den Fall  $\Omega = \mathbb{R}^d$ . Nach Voraussetzung (b) können wir  $\Omega' \subset \Omega$  mit  $\overline{\Omega'}$  kompakt in  $\Omega$  wählen, so dass ein  $C > 0$  mit

$$(10) \quad \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} \leq C\varepsilon, \quad f \in M.$$

existiert. Sei  $\eta_n$  ein Mollifier und  $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ . Dann gilt

$$(11) \quad \|\eta_n * \Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{h \in B(0, \varepsilon)} \|\tau_h \Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Da  $C_c(\mathbb{R}^d)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  ist, existiert für  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  eine Folge  $(\Phi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_j = f$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n * \Phi_j = \eta_n * f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d),$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \tau_h \Phi_j = \tau_h f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

Damit folgt aus (11) und (a), dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} = 0$$

gleichmäßig für alle  $f \in M$ , d.h. es existiert ein  $C > 0$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$(12) \quad \|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} < C\varepsilon, \quad f \in M.$$

Wegen  $\eta_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  gilt insbesondere  $\eta_n * f \in C(\overline{\Omega'})$ . Mit Arzela-Ascoli folgt nun, dass

$$M' = \{\eta_n * f : f \in M\}$$

relativ kompakt ist.

Somit existieren nach (Adams, Sobolev Spaces) Theorem 1.19 (*Total beschränkt*) eine endliche Menge von Funktionen  $\{\psi_1, \dots, \psi_m\} \subset C(\overline{\Omega'})$  mit

$$M' \subset \bigcup_{i=1}^m B(\psi_i, \varepsilon).$$

Daher existiert ein  $C > 0$ , so dass für  $f \in M$  ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  mit

$$(13) \quad |\psi_j(x) - (\eta_m * f)(x)| < C\varepsilon, \quad x \in \overline{\Omega'}$$

existiert. Bezeichne die Erweiterung mit 0 auf  $\mathbb{R}^d$  von  $\psi$  mit  $\tilde{\psi}$ . Dann folgt aus (10), (11), (12) und (13), dass

$$\|f - \tilde{\psi}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

für ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  gilt, d.h.

$$M \subset \bigcup_{i=1}^m B(\tilde{\psi}_i, \varepsilon).$$

Daher ist  $M$  relativ kompakt.

Der allgemeine Fall folgt aus dem Spezialfall, wenn man die Menge  $\tilde{M} = \{\tilde{f} : f \in M\}$ , wobei  $\tilde{f}$  die Erweiterung mit 0 auf  $\mathbb{R}^d$  von  $f$  bezeichnet, betrachtet. (s. Adams, Sobolev Spaces, Theorem 2.32)  $\square$

**THEOREM 5.9 (Rellich).** *Sei  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  beschränkt der Klasse  $C^1$ . Sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt*

(a)  $p < d \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ ,  $r \in [1, p^*)$ , wobei  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$  erfüllt ist;

(b)  $p = d \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ ,  $r \in [1, \infty)$ ;

(c)  $p > d \implies W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$

jeweils mit kompakter Einbettung.

**PROOF.** (a) Sei  $B$  die Einheitskugel in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Wir verwenden Satz 5.8. Sei  $1 \leq r < p^*$ . Dann existiert ein  $\theta \in (0, 1]$  mit  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p^*}$ . Sei  $\Omega' \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \Omega$  und  $|h| < \text{dist}(\Omega', \Omega^c)$ . Die Interpolationsungleichung 1.11 und 5.6 liefern

$$\begin{aligned} \|\tau_h u - u\|_{L^r(\Omega')} &\leq \|\tau_h u - u\|_{L^1(\Omega')}^\alpha \|\tau_h u - u\|_{L^{p^*}(\Omega')}^{1-\alpha} \\ &\leq |h|^\alpha \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}^\alpha (2\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \\ &\leq C|h|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{1-\alpha} \leq C|h|^\alpha, \end{aligned}$$

falls  $u \in B$ . Ferner gilt für solche  $u$

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^r(\Omega \setminus \Omega')} &= \left( \int_{\Omega \setminus \Omega'} |u(x)|^r dx \right)^{1/r} \leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \Omega')} |\Omega \setminus \Omega'|^{1-r/p^*} \\ &\leq |\Omega \setminus \Omega'|^{1-r/p^*} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

falls  $\Omega'$  geeignet gewählt ist.

(b) Analog.

(c) Sei  $p > d$ . Sei  $B$  die Einheitskugel in  $W^{1,p}(\Omega)$ . Es ist zu zeigen, dass  $B$  relativ kompakt in  $C(\overline{\Omega})$  ist. Korollar 5.5 liefert

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall f \in B,$$



mit  $\alpha > 0$ , d.h.  $B$  ist gleichmäßig gleichgradig stetig. Der Satz von Arzelà-Ascoli liefert die Behauptung.  $\square$

SATZ 5.10 (Poincaré Ungleichung). Sei  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Dann existiert  $C_\Omega > 0$  mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{für alle } f \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

PROOF. Sei  $f \in C_c^\infty(\Omega)$  und  $\Omega \subseteq [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ , und definiere  $f = 0$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ . Dann gilt für  $i = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} |f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d)|^p &= |f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, a_i, \dots, x_d)|^p \\ &= \left| \int_{a_i}^{x_i} \partial_i f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_d) \right|^p dy_i \\ &\leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{x_i} |\partial_i f|^p \leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{b_i} |\partial_i f|^p. \end{aligned}$$

Daher

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (b_i - a_i)^{p/p'} (b_i - a_i) \|\partial_i f\|_{L^p(\Omega)}^p = (b_i - a_i)^p \|\partial_i f\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Da  $(\sum_{i=1}^d |\partial_i f|^p)^{1/p} \leq M |\nabla f|$ , so erhalten wir die gewünschte Ungleichung.  $\square$

SATZ 5.11 (Einbettungssätze für  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ). Die obigen Einbettungssätze gelten auch für  $W_0^{1,p}$ -Räume.

PROOF. Klar, da  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ .  $\square$

BEMERKUNG 5.12 (Vektorwertige Sobolev-Räume). Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen. Wir definieren

$$W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{f = (f_1, \dots, f_m) : f_i \in W^{k,p}(\Omega), i = 1, \dots, m\}.$$

Dann gelten die Sätze für  $W^{k,p}(\Omega)$  auch für vektorwertige Sobolev-Räume.

PROOF. Sätze komponentenweise anwenden.  $\square$

## 6. Sobolev Räume IV. Spurooperatoren

SATZ 6.1 (Spursatz (Halbraum)). Sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung  $\Gamma_{\mathbb{R}_+^d} : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^{d-1})$  mit

$$\Gamma_{\mathbb{R}_+^d} u = u|_{\partial \mathbb{R}_+^d}, \quad u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^d}).$$

PROOF. Ü.A.  $\square$

SATZ 6.2. Sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt:

$$u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \Leftrightarrow \Gamma_{\mathbb{R}_+^d} u = 0, \quad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

PROOF. Die Richtung von links nach rechts ist klar. Sei nun  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$  mit  $\Gamma_{\mathbb{R}_+^d} u = 0$  und  $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $u_n \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$ . Wir bezeichnen die Fortsetzung von  $u$  mit 0 auf  $\mathbb{R}^d$  mit  $\tilde{u}$  und zeigen, dass  $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  liegt, wobei  $D^\alpha \tilde{u}$  die Fortsetzung von  $D^\alpha u$  mit 0 auf  $\mathbb{R}^d$  ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \tilde{u} \varphi &= \int_{\mathbb{R}_+^d} D^\alpha u \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^d} D^\alpha u_n \varphi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( - \int_{\mathbb{R}_+^d} u_n D^\alpha \varphi + \int_{\partial \mathbb{R}_+^d} u_n \varphi \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^d} u_n D^\alpha \varphi = \int_{\mathbb{R}_+^d} u D^\alpha \varphi = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{u} D^\alpha \varphi, \\ &|\alpha| \leq 1, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

da

$$\left| \int_{\partial \mathbb{R}_+^d} u_n \varphi \right| \leq \|\Gamma_{\mathbb{R}_+^d} u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d-1})} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Daher liegt  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ . Da  $h \mapsto T_{\vec{h}} u$  (vgl. 1. Übungsblatt) für  $\vec{h} = (0, 0, 0, \dots, h)$  eine stetige Abbildung mit Werten in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$  ist, folgt die Behauptung nach Lemma 3.10 (d).  $\square$

SATZ 6.3 (Spursatz). Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}_+^d$  beschränkt und von der Klasse  $C^1$ . Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung  $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$  mit

$$\Gamma_\Omega u = u|_{\partial\Omega}, \quad u \in C_c^\infty(\overline{\Omega}).$$

PROOF. Nach Voraussetzung existiert eine Überdeckung  $U_j$  des Randes von  $\Omega$ . Wir bezeichnen wieder die zugehörigen Diffeomorphismen mit  $\Phi_j$ . Weiter sei  $\varphi_j$  eine der Überdeckung  $U_j$  untergeordnete Zerlegung der Eins und  $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $0 \leq \psi_j \leq 1$  und  $\text{supp } \varphi_j \subset \subset \{\psi_j \equiv 1\}$ . Wir definieren

$$\Gamma_\Omega u := \sum \varphi_j(\Gamma_{\mathbb{R}_+^d}(\psi_j u) \circ \Phi_j) \circ \Phi_j^{-1}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\Gamma_\Omega u)(x) &= \sum \varphi_j(x)(\Gamma_{\mathbb{R}_+^d}(\psi_j u) \circ \Phi_j) \circ \Phi_j^{-1}(x) \\ &= \sum \varphi_j(x)((\psi_j u) \circ \Phi_j) \circ \Phi_j^{-1}(x) = \sum \varphi_j(x)(\psi_j u)(x) \\ &= u(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

$\square$

SATZ 6.4. Sei  $1 \leq p < \infty$ ,  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$  und von der Klasse  $C^1$ . Dann gilt:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \Gamma_\Omega u = 0, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

PROOF. Ü.A. Lokalisierung unter Verwendung von Satz 6.2. □

BEMERKUNG 6.5. Es stellt sich die Frage, ob die Abbildung  $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$  surjektiv ist, d.h. kann jede  $L^p$ -Funktion auf dem Rand ins Innere fortgesetzt werden?

Antwort: Nein, man kann aber zeigen, dass  $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  für  $1 < p < \infty$  surjektiv ist. Hier:

$$W^{s,p}(\partial\Omega) := \left\{ u \in L^p(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{d+sp}} dx dy < \infty \right\}, \quad s \in (0,1).$$

## Elliptische Randwertproblem in $L^2$

### 1. Elliptische Randwertprobleme

NOTATION 1.1. Die Sobolevräume werden im Falle  $p = 2$  mit  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$  bzw. mit  $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$  bezeichnet.

BEMERKUNG 1.2. Die Räume  $H^m$  und  $H_0^m$  sind Hilberträume mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D_{\alpha} f \overline{D_{\alpha} g}.$$

Insbesondere sind sie reflexiv. Die Norm ist hier gegeben durch das Skalarprodukt

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} := \langle f, f \rangle^{1/2} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D_{\alpha} f|^2 \right)^{1/2},$$

welches zu der  $W^{m,2}$ -Norm äquivalent ist.

Im Folgenden nehmen wir stillschweigend  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  an, aber natürlich gelten die Resultate auch im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

LEMMA 1.3. Sei  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen, beschränkt und von der Klasse  $C^1$ . Sei  $(u_n) \subseteq H^1(\Omega)$  schwach konvergent gegen ein  $u$ . Dann konvergiert  $u_n$  in  $L^2(\Omega)$  gegen  $u$ .

PROOF. Die Einbettung  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  ist kompakt (siehe Theorem 5.9). Nehmen wir an, dass eine Teilfolge  $u_{n_k}$  existiert mit  $\|u_{n_k} - u\|_{L^2(\Omega)} \geq \varepsilon$  für ein festes  $\varepsilon > 0$  und für alle  $n_k$ . Diese Teilfolge wird auch mit  $u_n$  bezeichnet. Da  $(u_n)$  beschränkt in  $H^1(\Omega)$  ist, hat es eine  $L^2(\Omega)$ -konvergente Teilfolge  $u_{n_k} \rightarrow u'$ . Aber  $u_{n_k} \rightarrow u$  schwach in  $H^1(\Omega)$  also auch schwach in  $L^2(\Omega)$ , was zu dem Widerspruch  $u' = u$  führt.  $\square$

BEMERKUNG 1.4. Natürlich gilt das obige Resultat für  $W^{1,p}$  Räume, so lange  $1 < p < \infty$  ist.

**1.1. Elliptische Gleichungen 2. Ordnung mit Dirichlet Randbedingungen.** Sei  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Seien  $a_{ji} = a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  und  $a_0 \in C(\overline{\Omega})$ ,  $a_0(x) \geq 0$  für jedes  $x \in \Omega$ . Wir setzen im Folgenden die sogenannte *Elliptizitätsbedingung* voraus:

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > \alpha |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein  $\alpha > 0$ , d.h. die Matrix mit den Einträgen  $(a_{ij})$  ist positiv definit.

PROBLEM 1.5 (Dirichlet-Randbedingung). *Finde  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit*

$$(P) \quad \begin{cases} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0 u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

**Klassische Lösung:** Eine Funktion  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , welche (P) erfüllt.

**Schwache Lösung:** Eine Funktion  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$(SP) \quad + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_{\Omega} a_0 u v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Schritt 1: Klassische Lösungen sind auch schwache Lösungen**

Falls  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  gilt auch  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Da  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , liegt  $u$  in  $H_0^1(\Omega)$ . Multiplikation mit  $v \in C_c^\infty(\Omega)$  und partielle Integration liefern (SP) für  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ . Der Dichtesatz 3.7 gibt (P) für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

**Schritt 2: Existenz von schwachen Lösungen**

Seien nun  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  des schwachen Problems (SP), mit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer von  $f$  unabhängigen Konstanten  $C$ .

PROOF. Setze

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_{\Omega} a_0 u v, \\ b(v) &:= \int_{\Omega} f v, \quad v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Dann ist  $a$  eine stetige Bilinearform auf  $H_0^1(\Omega)$ , denn

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C' \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass das lineare Funktional  $b$  stetig ist. Die Bilinearform  $a$  ist auch koerziv, denn

$$\begin{aligned}
a(u, u) &= \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u^2 \right) \stackrel{\text{ellipt.}}{\geq} \int_{\Omega} \alpha |\nabla u|^2 + a_0 \int_{\Omega} |u|^2 \\
&\geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + (\alpha - \varepsilon) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\stackrel{\text{Poincaré}}{\geq} \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{(\alpha - \varepsilon)}{C_{\Omega}^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left( \frac{\alpha}{C_{\Omega}^2} - \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{C_{\Omega}^2} \right) \right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  folgt die Koerzivität von  $a$ , d.h.  $a(u, u) \geq \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ ,  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Verwendung vom Lax–Milgram Lemma liefert die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung (vgl. ÜA).

Die schwache Lösung  $u$  erfüllt

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} a(u, u) = \frac{1}{\varepsilon} b(u) = \int_{\Omega} f u \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dies zeigt  $\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}$ , also die gewünschte Normabschätzung.  $\square$

### Schritt 3: Regularität der Lösung

Seien  $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$  für alle  $x \in \Omega$  und  $\Omega$  offen, beschränkt, von der Klasse  $C^2$ . Sei  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung von (P). Dann gilt

- (a)  $u \in H^2(\Omega)$  und  $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$ .
- (b) Ist  $f \in H^m(\Omega)$  und  $\partial\Omega$  der Klasse  $C^{m+2} \implies u \in H^{m+2}(\Omega)$  und  $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^m(\Omega)}$ .

PROOF. Siehe Kapitel 2.  $\square$

KOROLLAR 1.6. Sei  $f \in H^m(\Omega)$  und  $u \in H^{m+2}(\Omega)$  die schwache Lösung von (P). Die Sobolevschen Einbettungsätze 4.9 geben  $W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega)$ , falls  $l > 2 + d/p$ . Für  $p = 2$  und  $m > d/2$  gilt  $u \in H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$ .

### Schritt 4: Rückkehr zur klassischen Lösung

Sei  $f \in H^m(\Omega)$  mit  $m > d/2$ . Dann existiert eine schwache Lösung  $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ . Ferner partielle Integration und Dichtheitsargument liefern die Existenz klassischer Lösungen.

## 2. $L^2$ -Regularitätstheorie

Sei  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Seien  $a_{ji} = a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $1 \leq i, j \leq d$  und  $b_i, a_0 \in C(\bar{\Omega})$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Wir setzen die Elliptizitätsbedingung voraus. Wir untersuchen zunächst die Regularität von Lösungen der folgenden

Gleichung für  $f \in L^2(\Omega)$ .

$$(14) \quad - \sum_{i,j=1}^d \partial_j (a_{ij} \partial_i u) + \sum_{i=1}^d b_i \partial_i u + a_0 u = f \quad \text{in } \Omega.$$

**THEOREM 2.1** (Innere Regularität). *Sei  $f \in L^2(\Omega)$  und  $u \in H^1(\Omega)$  eine schwache Lösung von (14). Dann ist  $u \in H_{loc}^2(\Omega)$  und für  $V \subset\subset \Omega$  gilt:*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

wobei  $C$  nur von  $\Omega$ ,  $V$  und  $a_{ij}$ ,  $b_i$  und  $a_0$  abhängt.

**PROOF.** Wir betrachten nur den Fall  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $b_i = a_0 = 0$ . Zu  $V \subset \Omega$  wähle  $W_1 \subset \Omega$  und  $W_2 \subset \Omega$  offen mit

$$\overline{V} \subset W_1 \subset \overline{W_1} \subset W_2 \subset \overline{W_2} \subset \Omega$$

und  $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\xi = 1$  auf  $V$ ,  $\xi = 0$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus W_1$  und  $0 \leq \xi \leq 1$ . Betrachte

$$(15) \quad \int_{\Omega} (\nabla \varphi)(\nabla u) = \int_{\Omega} \varphi f, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Setze  $\varphi = -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$ , wobei

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x + h e_k) - u(x)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi f &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla u = \int_{\Omega} \nabla \left( D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u) \right) \nabla u = \int_{\Omega} \nabla \left( (\xi^2 D_k^h u) \right) D_k^h \nabla u \\ &= \int_{\Omega} 2\xi(\nabla \xi) D_k^h u D_k^h \nabla u + \int_{\Omega} \xi^2 D_k^h(\nabla u) D_k^h \nabla u \\ &\geq -C \|D_k^h u\|_{L^2(W_1)} \|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)} + \|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|\nabla u\|_{L^2(W_1)}^2. \end{aligned}$$

Weiter

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \|\nabla(\xi^2 D_k^h u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C (\|2\xi \nabla \xi D_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi^2 \nabla D_k^h u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\leq C \left( \|D_k^h u\|_{L^2(W_1)}^2 + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)}^2 \right) \\ &\leq C \left( \|\nabla u\|_{L^2(W_1)}^2 + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)}^2 \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \varphi f \right| &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} (\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} + \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|_{L^2(W_1)}) \\ &\leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H^1(W_1)}^2 + \frac{1}{4} \|\xi^2 D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Also,

$$\frac{1}{4} \|D_k^h \nabla u\|_{L^2(V)}^2 \leq \frac{1}{4} \|\xi D_k^h \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H^1(W_1)}^2)$$

für  $h$  klein genug, d.h.  $\nabla u \in H^1(V)$  und

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(W_1)}).$$

Wähle  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\eta = 1$  auf  $W_1$ ,  $\eta = 0$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus W_2$  und  $0 \leq \eta \leq 1$ . Mit  $\varphi = \eta^2 u$  in (15) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \varphi &= \int_{\Omega} (\nabla \varphi) \nabla u = \int_{\Omega} \eta^2 (\nabla u) (\nabla u) + \int_{\Omega} 2\eta (\nabla \eta) u \nabla u \\ &\geq \|\eta \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C \|u\|_{L^2(W_2)} \|\eta \nabla u\|_{L^2(W_2)} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\eta \nabla u\|_{L^2(W_2)}^2 - C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \varphi f \right| &\leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

d.h.

$$\|\nabla u\|_{L^2(W_1)} \leq \|\eta \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left( \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Also

$$\|u\|_{H^1(W_2)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

□

**THEOREM 2.2** (Höhere innere Regularität). Sei  $a_{ij}, a_0, b_i \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in H^m(\Omega)$  und  $u \in H^1(\Omega)$  eine schwache Lösung von (14). Dann ist  $u \in H_{\text{loc}}^{m+2}(\Omega)$  und für  $V \subset\subset \Omega$  gilt:

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C (\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

wobei  $C$  nur von  $\Omega$ ,  $V$  und  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $a_0$  abhängt.



PROOF. Der Fall  $m = 0$  ist klar. Wir betrachten nur den Fall  $b_i = a_0 = 0$ . Sei nun  $m \in \mathbb{N}$  und das Theorem gelte für  $m$ . Insbesondere gilt dann  $u \in H_{\text{loc}}^{2+m}(\Omega)$  und für alle  $V \subset\subset \Omega$  existiert  $C > 0$  mit

$$(16) \quad \|u\|_{H^{2+m}(V)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \quad f \in H^m(\Omega).$$

Wir zeigen, dass das Theorem dann auch für  $m + 1$  gilt.

Sei  $W \subset \Omega$  mit  $\bar{V} \subset W \subset \bar{W} \subset \Omega$  und  $|\alpha| = m + 1$ . Wähle  $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(W)$  und  $\varphi = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \tilde{\varphi}$ . Mit partieller Integration erhalten wir

$$(17) \quad \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i \tilde{\varphi} \partial_j \tilde{u} = \int_{\Omega} \tilde{\varphi} \tilde{f}$$

mit  $\tilde{u} = D^\alpha u \in H^1(W)$  und

$$\tilde{f} = D^\alpha f - \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \neq \alpha} \left[ - \sum_{i,j=1}^d \partial_i (D^{\alpha-\beta} a_{ij} D^\beta \partial_j u) \right].$$

Insbesondere folgt aus (16)  $\tilde{f} \in L^2(W)$  und

$$\|f\|_{L^2(W)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Daher folgt mit Theorem 2.1

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(V)} \leq C(\|\tilde{f}\|_{L^2(W)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}) \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

d.h.  $\|u\|_{H^{m+3}(V)} \leq C(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$ .  $\square$

Im nächsten Schritt betrachten wir das Problem

$$(18) \quad - \sum_{i,j=1}^d \partial_j (a_{ij} \partial_i u) + \sum_{i=1}^d b_i \partial_i u + a_0 u = f \text{ in } \Omega$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

THEOREM 2.3. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt von der Klasse  $C^2$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  und  $u \in H_0^1(\Omega)$  eine schwache Lösung von (18). Dann ist  $u \in H^2(\Omega)$  und es gilt:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

wobei  $C$  nur von  $\Omega$  und  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $a_0$  abhängt.

PROOF. Wir betrachten wieder nur den Fall  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $b_i = a_0 = 0$ .

Schritt 1:

Sei  $\Omega = B(0, 1) \cap \mathbb{R}_+^d$  und setze  $V = B(0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{R}_+^d$ . Wähle  $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $\xi \equiv 1$  auf  $B(0, \frac{1}{2})$ ,  $\xi \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus B(0, 1)$  und  $0 \leq \xi \leq 1$ . Sei  $u \in H^1(\Omega)$  mit  $u|_{\partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^d} = 0$  und

$$\int_{\Omega} (\nabla \varphi)(\nabla u) = \int_{\Omega} \varphi f, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

Für  $k = 1, \dots, d-1$  setze  $\varphi := -D_k^{-h}(\xi^2 D_k^h u)$ . Da

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\frac{1}{h} D_k^{-h}(\xi^2(x)[u(x+he_k) - u(x)]) \\ &= \frac{1}{h^2}(\xi^2(x-he_k)[u(x) - u(x-he_k)] - \xi^2(x)[u(x+he_k) - u(x)]), \\ &\quad x \in \Omega,\end{aligned}$$

folgt  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ . Wie im Beweis von Theorem 2.1 erhalten wir

$$\|D_k^h \nabla u\|_{L^2(V)}^2 \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right),$$

d.h.  $\partial_k u \in H^1(V)$  für  $k = 1, \dots, d-1$  und

$$(19) \quad \sum_{k,l=1, k+l < 2d}^d \|\partial_k \partial_l u\|_{L^2(V)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Desweiteren gilt:

$$-\partial_d^2 u = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2 u - \Delta u = \sum_{i=1}^{d-1} \partial_i^2 u + f.$$

Damit (i. A. aus der Elliptizität)

$$(20) \quad \|\partial_d^2 u\|_{L^2(V)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

Außerdem gilt:

$$(21) \quad \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla u) = \int_{\Omega} u f \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Aus (19), (20) und (21) folgt nun

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

### Schritt 2:

Sei nun  $\Omega$  beliebig und wähle zu  $x \in \partial\Omega$

$$\Phi_x : \Omega' := B(x, r) \cap \mathbb{R}_+^d \rightarrow U(x),$$

$V' := B(x, r/2) \cap \mathbb{R}^d$  für ein  $r > 0$  (vgl. Definition 5.2. Setze  $V := \Phi_x(V')$  und  $u' = u \circ \Phi_x$ . Dann gilt  $u' \in H^1(\Omega')$ ,  $u|_{\partial\Omega' \cap \mathbb{R}_+^d} = 0$  und (dies ist noch zu Zeigen)

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a'_{ij} \partial_j \varphi' \partial_i u' = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d b'_i \varphi' \partial_i u' + \int_{\Omega} a'_0 \varphi' u' + \int_{\Omega} \varphi' f',$$

mit  $f' = f \circ \Phi_x$  und geeigneten  $a'_{ij}$ ,  $b'_i$  und  $a'_0$ . Außerdem gilt (auch dies ist noch zu Zeigen)

$$\sum_{i,j=1}^d a'_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha' |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Nach dem ersten Schritt ist  $u' \in H^2(V')$  und es gilt

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq C(\|f'\|_{L^2(\Omega')} + \|u'\|_{L^2(\Omega')}),$$

wobei  $C > 0$  unabhängig von  $f'$  ist. Also ist  $u \in H^2(V)$  und es gilt

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

mit einer von  $f$  unabhängigen Konstante  $C$ .

Da  $\partial\Omega$  kompakt ist, können wir  $\partial\Omega$  mit endlich vielen  $V_1, \dots, V_N$  überdecken. Dies liefert zusammen mit der inneren Regularität die gewünschte Abschätzung.  $\square$

Analog zu Theorem 2.2 erhalten wir

**THEOREM 2.4.** *Sei  $a_{ij}, b_i, a_0 \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in H^m(\Omega)$  und  $u \in H_0^1(\Omega)$  eine schwache Lösung von (18). Dann ist  $u \in H^{m+2}(\Omega)$  und es gilt:*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}),$$

wobei  $C$  nur von  $\Omega$  und  $a_{ij}, b_i, a_0$  abhängt.

**PROOF.** Ohne Beweis.  $\square$

**KOROLLAR 2.5.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  von der Klasse  $C^2$ ,  $b_i = 0$ ,  $a_0(x) \geq 0$  für  $x \in \Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  und  $u \in H_0^1(\Omega)$  eine schwache Lösung von (18). Dann ist  $u \in H^2(\Omega)$  und es gilt:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei  $C$  nur von  $\Omega$  und  $a_{ij}, a_0$  abhängt.

**PROOF.** Lax-Milgram liefert  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ . (Die Einschränkung an die Koeffizienten liefert die Koerzivität).  $\square$