Gesucht: Stetige Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, in Ω zweimal differenzierbar mit

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) & = & f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) & = & 0(x) & \forall x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2}$$

Anwendung: Potential eines Ladungsfreies elektrisches Feldes.

u stationäre Temperaturverteilung

BEMERKUNG 2.1. *Δ ist ein linearer Operator $\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v$.*

Idee: Definiere den Laplace-Operator in geeigneten Räumen und untersuche Abbildungsvorschriften.
Sei z.B. $X := \{h : h \in C^2(\overline{\Omega}),\ h\big|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $Y := C(\overline{\Omega})$ und betrachte $\Delta_{XY} : X \to Y$.
Typische Fragestellungen:

(a) Ist Δ_{XY} injektiv (d.h. die Lösung der Gleichung 2 ist eindeutig, falls sie existiert)
(b) Ist Δ_{XY} surjektiv (d.h. es existiert eine Lösung der Gleichung 2 für alle $f \in Y$).
(c) Finde möglichst einen großen Raum Y so dass Δ_{XY} surjektiv ist (d.h. die Gleichung ist für viele f lösbar).
(d) Da X typischerweise nicht explizit gegeben ist, finde möglichst viele Eigenschaften von X (d.h. Eigenschaften der Lösung).

BEMERKUNG 2.2. (a) *Der Laplace-Operator besitzt keine guten Eigenschaften in $C(\overline{\Omega})$. Suche nach geeigneten Räumen führt auf* Sobolev-Räume *(reflexive Banachräume bzw. Hilberträumen).*

Idee (L_2-Theorie):

(a) Die Existenz einer *schwachen* Lösung lässt sich im Hilbertraumfall (L_2-Theorie) sehr einfach über Lax-Milgram zeigen.
(b) Regularitätstheorie liefert dann eine *starke* bzw. *klassische* Lösung.

BEMERKUNG 2.3. *Eine wichtige Rolle bei der Regularitätstheorie spielt die sogenannte Lokalisierung.*

Idee (L_p-Theorie):

(a) Betrachte zunächst
$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$
(b) Benutze die sog. *Fouriertransformation.* Die zentrale Eigenschaft dieser Abbildung ist, dass sie Differentialausdrücke in algebraische umwandelt. Im Fall $(\lambda - \Delta)$ erhält man
$$(\lambda + |\xi|^2)\mathcal{F}u = \mathcal{F}f.$$
Damit ist die formale Inverse von $(\lambda - \Delta)$ durch $u = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}f$ gegeben.

Typische Fragestellungen:

(a) Wie kann man dem formalen Ausdruck $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ als Operator: $Y \to X$ einen Sinn zu geben?
(b) Finde hinreichende Bedinungen, so dass $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ ein beschränkter Operator in L_p ist.

Bemerkung 2.4. *Auf diesem Weg werden wir auch erkennen, dass sich* $T = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ *auch als Integraloperator, d.h.* $Tf(x) = \int k(x,y)f(y)dy$, *darstellen lässt.*

Im letzten Abschnitt betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung (1).
Idee:
(a) Betrachte u als Funktion $t \to u(t,\cdot) \in X$, X ein Funktionenraum (Sobolevraum)
(b) Sei Δ der Laplaceoperator und betrachte

$$\begin{aligned} u'(t) - \Delta u(t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL im Banachraum!
(c) Ana III: Lösung ist $\mathrm{e}^{\Delta t}u_0$.

Typische Fragestellungen
(a) Vernüftige Definition für e^{tA} für große Klassen von (Differential-)operatoren.
(b) Suche Bedingungen an A, so dass e^{tA} wohldefiniert ist

Bemerkung 2.5. *Für spezielle (in Physik und Ingenieurwissenschaften sehr relevante) Klassen von Differentialoperatoren, sog.* Divergenzoperatoren, *lässt sich zeigen, dass* e^{tA} *wieder ein Integraloperator ist (z.B. Laplace auf* beliebigen *offenen Mengen).*

KAPITEL 2

Sobolevräume

1. L_p Räume (Erinnerung)

In diesem Abschnitt sei (M, Σ, μ) stets ein Maßraum.

Definition 1.1.

(a) *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Setze* $\|f\|_p := \Big(\int\limits_M |f|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p}$.

(b) *Sei* $f : M \to \mathbb{K}$ *messbar. Dann heißt* f wesentlich beschränkt, *falls ein* $\alpha > 0$ *existiert mit* $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. *Ferner heißt*

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : \ \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\} = 0)\}$$

das wesentliche Supremum von f.

(c) *Sei* $1 \leq p \leq \infty$. *Definiere*

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K}) := \big\{ f : f : M \to \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty \big\}.$$

Bemerkung 1.2.

(a) $\|\cdot\|_p$ *ist eine Halbnorm auf* $\mathcal{L}^p$.

(b) *Sei* $f \in \mathcal{L}^p$. *Dann ist* $\|f\|_p = 0$ *genau dann wenn*

$$f \in \mathcal{N} := \{f : \ f \text{ messbar und } f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

(c) $\mathcal{L}^p$ *ist ein Vektorraum.*

(d) $\mathcal{N}$ *ist ein Unterraum von* $\mathcal{M}$, *dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von* $\mathcal{L}^p$*), und*

$$f \sim g \quad \overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \quad f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation

Definition 1.3. *Der Raum* L^∞ *ist definiert durch:*

$$L^\infty(M, \mu) := \mathcal{L}(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty, \qquad \forall [f] \in L^\infty.$$

Satz 1.4.

(a) $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ*-fast überall.*

(b) $\|\cdot\|_\infty$ *ist ein Norm.*

(c) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \implies$ *es existiert ein* $A \in \Sigma$ *mit* $\mu(A^c) = 0$ *und* $f_n \to f$ *gleichmässig auf* A.

(d) $(L^\infty(M, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

DEFINITION 1.5. *Sei* $1 \leq p < \infty$

$$L^p(M,\mu) := (M,\Sigma,\mu,\mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \qquad \forall [f] \in L^p.$$

SATZ 1.6 (Höldersche Ungleichung). *Es sei* $1 \leq p, q \leq \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *(interpretiere* $1/\infty = 0$*). Desweiteren seien* $f \in L^p(M,\mu)$ *und* $g \in L^q(M,\mu)$. *Dann ist* $f \cdot g \in L^1(M,\mu)$ *und*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

PROOF. Die Fälle $p = 1, \infty$ sind trivial. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $f, g \neq 0$. Dann gilt

$$ab \leq \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q} \qquad \text{(Youngsche Ungleichung).}$$

(Der Beweis dieser Ungleichung ist elementar.) Natürlich ist fg messbar. Seien $G := g/\|g\|_q$ und $F := f/\|f\|_p$. Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt $x \in M$ ergibt nach Integration

$$\int_M |F(x)G(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_M \frac{|F(x)|^p}{p}\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_M \frac{|G(x)|^q}{q}\,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt. □

SATZ 1.7 (Minkowskische Ungleichung). *Sei* $1 \leq p < \infty$ *und* $f, g \in L^p(M,\mu)$. *Dann gilt*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

SATZ 1.8 (Riesz–Fischer). *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Dann ist* $L^p(M,\mu)$ *vollständig.*

SATZ 1.9. *Nehmen wir an, dass* $f_n \in L^p(M,\mu)$ *gegen* $f \in L^p(M,\mu)$ *konvergiert, dann existiert eine Teilfolge* f_{n_k}, *so dass* $f_{n_k}(x)$ μ*-fast überall konvergiert.*

SATZ 1.10 (Dualität). *Sei* $1 \leq p < \infty$, *und* (M,Σ,μ) σ*-endlicher Maßraum. Sei* $1/p + 1/q = 1$ *(so genannte* konjugierte Exponente*). Dann definiert* $L^q(M,\mu) \to L^p(M,\mu)'$

$$J(g)f := \int_M f \cdot g\,\mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^q(M,\mu),\ f \in L^p(M,\mu).,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

PROOF. J ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist J linear. J ist isometrisch, denn sei $g \in L^q(M,\mu)$ und setze

$$f := \frac{\overline{g}}{|g|}\Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^{q/p}.$$

Dann

$$\|f\|_p = \int_M \left(\frac{|\overline{g}|}{|g|}\right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\,\mathrm{d}\mu = 1$$

und $\int_M fg\,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen.

1. Fall $\mu(M) < \infty$: Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Betrachte $\nu : \Sigma \to \mathbb{K}$, $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$ ($\chi_A \in L^p(M,\mu)$). ν ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist ν absolut stetig bezüglich μ, denn $A \in \Sigma$ und $\mu(A) = 0$ impliziert $\chi_A = 0$ μ-fast überall, d.h. $\chi_A = 0$ in $L^p(M,\mu)$, also $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$. Satz von Radony–Nikodým ergibt $g \in L^1(M,\mu)$ mit

$$\nu(A) = \int\limits_A g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M \chi_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Also wegen Linearität

$$\varphi(f) = \int\limits_M fg \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \text{ Treppenfunktionen } f. \tag{3}$$

Ferner $|\varphi(f)| \leq C'\|f\|_\infty$. Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^\infty(M,\mu)$ also gilt (3) für $f \in L^\infty(M,\mu)$. Wir zeigen nun $g \in L^q(M,\mu)$. Sei erst $q < \infty$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

f ist messbar und $|g|^q = fg = |f|^p$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in M : |f(x)| \leq n\}$. Dann ist $\chi_{A_n} f \in L^\infty(M,\mu)$ und

$$\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M \chi_{A_n} fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \leq \|\varphi\| \|\chi_{A_n} f\|_p =$$

$$= \|\varphi\| \Big(\int\limits_{A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} = \|\varphi\| \Big(\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\int\limits_{A_n} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Satz von Beppo Levi(monotone Konvergenz) gibt $g \in L^q(M,\mu)$.
Jetzt betrachten wir der Fall $q = \infty$. Dann $|g| \leq \|\varphi\|$, denn sei $A := \{x \in M : |g(x)| > \|\varphi\|\}$. Setze $f := \chi_A |g|/g$, $f \in L^\infty(M,\mu)$. Nehmen wir $\mu(A) > 0$ an.

$$\mu(A)\|\varphi\| < \int\limits_A |g| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(f) \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme $\Longrightarrow \mu(A) < \|f\|_1$, Widerspruch mit $\mu(A) = \|f\|_1$. Also $g \in L^\infty(M,\mu)$.

Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(M,\mu)$ also $\varphi = Jg$.

2. Fall, $\mu(M) = \infty$: Es sei $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ mit $\mu(M_n) < \infty$, und M_n paarweise disjunkt. Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Setze $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$, für $f \in L^p(M_n,\mu_n)$, wobei $\mu_n(A) := \mu(M_n \cap A)$. Dann $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$, insbesondere $\varphi_n \in L^p(M_n,\mu_n)'$. Verwende jetzt den ersten Fall um $g_n \in L^q(M_n,\mu_n)$ zu bekommen. Setze $g := \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ (in jedem Punkt nur ein Summand, g_n wird durch 0 fortgesetzt auf M_n^c). Es ist $g \in L^q(M,\mu)$ und $\varphi = Jg$ zu zeigen. Sei $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$ und f wie in (4)

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^n \int\limits_{M_j} fg \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \int\limits_{M_j} \chi_{M_j} f g_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f)\\ &= \varphi(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f) \le \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p\\ &= \|\varphi\| \cdot \Big(\sum_{j=1}^n \int\limits_M |\chi_{M_j} f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \Big(\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}} \le \|\varphi\|$, und nach Beppo Levi Theorem $g \in L^q(M,\mu)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \varphi(\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} fg\\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_M \chi_{A_n} fg \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int\limits_M fg.\end{aligned}$$

□

Satz 1.11 (L^p Interpolation Ungleichung). *Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(M,\mu) \cap L^{p_1}(M,\mu)$, dann ist $f \in L^{p_\theta}(M,\mu)$ und es gilt*

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Proof. Setze $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$ und $h := |f|^{\theta p_\theta}$. Dann ist $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$, ferner $g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(M,\mu)$ und $h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(M,\mu)$ und

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \le \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. □

Satz 1.12 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung). *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p_i \le \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \ldots, m$. Sei ferner $1 \le p \le \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_p \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Proof. ÜA. □

Definition und Satz 1.13. *(a) $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) := L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu)$ versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$ ist ein Banachraum.*

(b) Definiere

$$L^1 + L^\infty(M,\mu) := \{f : M \to \mathbb{K} \ mb. : \exists g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu) \ mit\ f = g + h\}.$$

Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty :\ f = g + h : g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu)\}.$$

ist eine Norm, mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

Satz 1.14. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt $L_p(M,\mu) \subseteq L_1 + L_\infty(M,\mu)$.*

Proof. Der Fall $p = \infty$ ist trivial. Sei $f \in L^p(M,\mu)$. Setze $A := \{x \in M : |f(x)| \ge 1\}$ und $h := \chi_A f$, $g := \chi_{M\setminus A} f$. Dann $g \in L^\infty(M,\mu)$ und $h \in L^1(M,\mu)$, denn

$$\int_M |h| \,\mathrm{d}\mu = \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu \le \int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Theorem 1.15 (Riesz–Thorin Konvexitätstheorem). *Sei $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$ linear, ferner seien $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1,\infty]$ mit $p_0 < p_1$ und $r_0 < r_1$. Sei $\alpha \in (0,1)$ und setze*

$$\tfrac{1}{p_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{p_0} + \tfrac{\alpha}{p_1} \qquad \text{und} \quad \tfrac{1}{r_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{r_0} + \tfrac{\alpha}{r_1}.$$

Dann gilt

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_\alpha},L^{r_\alpha})} \le \|T\|^{1-\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_0},L^{r_0})} \|T\|^{\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_1},L^{r_1})}.$$

Zur Beweis benötigen wir folgenden Satz und folgendes Lemma.

Satz 1.16 (Hadamard, 3-Linien Satz). *Sei $a < b$ und $f : \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\} \to \mathbb{C}$ analytisch und beschränkt. Weiter sei*

$$M_a = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(a+it)|, \ \text{und}\ M_b = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(b+it)|.$$

Dann gilt:

$$|f(x+iy)| \le M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}, \quad x + iy \in \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\}.$$

Proof. Wir betrachten $f_\varepsilon(x+iy) = \mathrm{e}^{\varepsilon(x+iy)^2} f(x+iy) M_a^{\frac{x+iy-b}{b-a}} M_b^{\frac{a-(x+iy)}{b-a}}$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt $|f_\varepsilon(a+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon a^2}$ und $|f_\varepsilon(b+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}$ (Beachte: $|a^{iy}| = 1$ für $a > 0$, $y \in \mathbb{R}$). Außerdem gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} \sup_{a\le x\le b} |f_\varepsilon(x+iy)| = 0.$$

Mit dem Maximumprinzip für analytische Funktionen und ein hinreichend großes Rechteck folgt $|f_\varepsilon(z)| \le \max\{\mathrm{e}^{\varepsilon a^2}, \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}\}$. Aus $\varepsilon \to 0^+$ folgt die Behauptung. □

LEMMA 1.17. *Sei* $p_0 < p < p_1$ *und* $f = \sum \alpha_j a_j \chi_{E_j}$ *eine Treppenfunktion mit* $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $|\alpha_j| = 1$, $a_j > 0$ *und* $\{E_j\}$ *paarweise, disjunkte, mb. Mengen mit (jeweils) endlichem Maß. Weiter sei* $\|f\|_p = 1$ *und*

$$f_z = \sum \alpha_j a_j^{\frac{p}{p_z}} \chi_{E_j},$$

wobei p_z

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

genügt. Dann gilt:

$$\|f_z\|_{L^{p_{\mathrm{Re}\, z}}} = 1, \quad 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1.$$

PROOF. Es gilt

$$\int |f_z(x)|^{p_{\mathrm{Re}\, z}} d\mu \overset{\text{Ü.A.}}{=} \sum |a_j|^p \mu(E_j) = \|f\|_p^p = 1.$$

□

BEWEIS V. THEOREM 1.15. Sei $p = p_\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ und betrachte Treppenfunktion f und f' auf M, welche $\|f\|_p = \|f'\|_{p'} = 1$ erfüllen. Sei f_z und f_z' wie in Lemma 1.17, wobei f_z mit p_0 und p_1 und f_z' mit r_0 und r_1 konstruiert werden. Nach Voraussetzung ist

$$\Phi(z) := \int_M f_z'(x) T f_z(x) d\mu(x)$$

analytisch in z. Mit der Hölder-Ungleichung und Lemma 1.17 folgt nun:

$$|\Phi(j+iy)| \leq \|f_z'\|_{p'} M_j \|f_z\|_p \leq M_j, \quad j = 0, 1, \ y \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\Phi(j+iy)| \leq M_j, \quad j = 0, 1.$$

Damit folgt mit dem 3-Linien Satz, dass

$$|\int f' T f| \leq M_0^{1-\alpha} M_1^\alpha.$$

Da Treppenfunktionen dicht in $L^{p'}$ sind, erhalten wir $\|Tf\|_p \leq M_0^{1-\alpha} M_1^\alpha$. Die Behauptung folgt nun, da Treppenfunktionen auch in L^p dicht sind. □

2. L_p Räume II

Im Folgenden sei μ stets das Lebesgue-Maß und Σ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

SATZ 2.1 (Faltung, Youngsche Ungleichung). *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$. *Dann gilt*

(a) *Für fast alle* $x \in \mathbb{R}^d$ *ist* $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

(b) Setzt man

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

so ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

Proof. Sei $p = 1$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \|f\|_1\|g\|_1.$$

Für $p = \infty$ liefert die Hölder-Ungleichung

$$|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y| \leq \|f\|_1\|g\|_\infty,$$

insbesondere existiert $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.
Betrachte nun die Abbildung $T_f g := f * g$. Dann folgt aus dem Riesz–Thorin Konvexitätstheorem, dass $T_f \in \mathscr{L}(L^p, L^p)$ und $\|T_f\|_{\mathscr{L}(L^p,L^p)} \leq \|f\|_1$ für $1 \leq p \leq \infty$, d.h. (b) gilt. Ferner erhalten wir mit Beppo-Levi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||\chi_{B(0,r)}g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \|f\|_1\|\chi_{B(0,r)}g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p < \infty, \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}^d.$$

□

Beispiel 2.2.

(a) Betrachte die partielle Differentialgleichung

$$(1-\Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $f \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(x) = (k * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einem Kern *$k \in L^1$.*

(b) Betrachte

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $u_0 \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(t,x) = (k_t * u_0)(x), \quad t>0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

mit $k_t \in L^1$ für $t>0$.

Im Folgenden benötigen wir den Raum der *lokal* integrierbaren Funktionen $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Genauer,

$$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\text{mb.} : \|f\|_{L^1(K)} < \infty \text{ für alle kp. } K \subset \mathbb{R}^d \Big\}.$$

KOROLLAR 2.3. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann definiert die Abbildung $Tf := f * g$ einen stetigen linearen Operator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\|T\| \le \|f\|_1$.*

SATZ 2.4. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Wegen $|(f*g)(x)| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$.
Sei $x_n \to x$. Setze $F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$ und $F(y) = f(x-y)g(y)$, dann $F_n(y) \to F(y)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^d$. Anderseits, sei K kompakt so, dass $x_n - \operatorname{supp} f \subseteq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $x_n - y \notin \operatorname{supp} f$ falls $y \notin K$, d.h. $f(x_n - y) = 0$ für $y \notin K$, und so $|F_n(y)| \le \|f\|_\infty \chi_K(y)|g(y)|$ integrierbare Majorante. Nach dem Lebesgueschen Satz folgt $\int F_n\,\mathrm{d}y \to \int F\,\mathrm{d}y$. □

DEFINITION 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und setze*

$$O_f := \Big\{ x \in \Omega : \exists V \subset \Omega \text{ offene Umgebung von } x \text{ mit } f(x) = 0 \text{ für f.a. } x \in V \Big\}$$

Dann heißt $\operatorname{supp} f := \Omega \setminus O_f$ *der* Träger *von f.*

SATZ 2.6. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \tag{5}$$

PROOF. Wegen $|(f*g)(x)| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$. Also

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{(x-\operatorname{supp} f)\cap \operatorname{supp} g} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Falls $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, gilt $(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ und $(f*g)(x) = 0$. □

BEMERKUNG 2.7. *Im Satz 2.6 gilt $\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.*

BEMERKUNG 2.8. *Die obige Aussage* (5) *gilt auch für* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$.

SATZ 2.9. *Seien* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. *Dann ist* $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$, *und* $D^\alpha(f*g) = D^\alpha f*g$. *Insbesondere* $f \in C_c^\infty$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

PROOF. Wie immer existiert $(f*g)(x)$ für alle x. Sei $e_j \in \mathbb{R}^d$ ein Standardbasisvektor, $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq 1$. Setze $K := \operatorname{supp} f + \overline{B}(0,1)$, dies ist auch kompakt. Dann gilt (Differenzenquotient):

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{h}((f*g)(x+he_j) - (f*g)(x))\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y =\\ &= \int_{K-x} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

wobei der Integrand gegen $D_j f(x-y)g(y)$ für alle y konvergiert. Außerdem gilt

$$\left|\tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\right| \leq \|D_j f\|_\infty |g(y)|\chi_K(y).$$

Nach dem Satz von Lebesgue (Beachte: $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ bekommen wir $D_j(f*g)(x) = ((D_j f)*g)(x)$, und so die Behauptung. □

DEFINITION 2.10. *Eine Folge* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *von Funktionen mit den Eigenschaften*

(a) $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$
(b) $\rho_n \geq 0$
(c) $\operatorname{supp} \rho_n \subseteq B(0,1/n)$
(d) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$

heißt Mollifier*.*

BEISPIEL 2.11. *Betrachte* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq B(0,1)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$, *und definiere* $\rho_n(x) := 1/n^d \rho(nx)$.

LEMMA 2.12. *Sei* $f \in C(\mathbb{R}^d)$ *und* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *ein Mollifier. Dann konvergiert* $\rho_n * f \to f$ *gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von* $\mathbb{R}^d$.

PROOF. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon$ für $x \in K$ und $|y| \leq \delta$. Also

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{B(0,1/n)} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

so für $n > 1/\delta$ gilt $|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$ für $x \in K$. □

LEMMA 2.13 (Urysohn, C^∞-Version). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq \Omega$, K kompakt. Dann existiert ein $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi(x) = 1$ für $x \in K$.*

PROOF. Sei $0 < 1/n < \varepsilon < \varepsilon + 1/n < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$. Setze $U_\varepsilon := \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, K) < \varepsilon\} \subseteq \Omega$ und $u = \chi_{U_\varepsilon}$. Dann gilt $\varphi := \rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B}(0, 1/n) + \overline{U}_\varepsilon \subseteq \Omega$, also $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega$ ist kompakt. Sei $x \in K$, dann $\varphi(x) = \int_{|y|\leq 1/n} u(x-y)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|y|\leq 1/n} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y = 1$. Ferner $\|\varphi\|_\infty \leq \|\rho_n\|_1 \cdot \|u\|_\infty = 1$. Da $\varphi \geq 0$ folgt auch $0 \leq \varphi \leq 1$. □

BEMERKUNG 2.14. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann existiert $V \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $\overline{V}$ kompakt und*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega.$$

PROOF. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ wie in Lemma 2.13 und setze

$$V := \{x \in \Omega; \varphi(x) > \frac{1}{2}\}.$$

□

SATZ 2.15. *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
Beh.:$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktion $T = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und $\|T - f\|_p \leq \varepsilon$, bekannt aus der Maßtheorie.
Beh.:$\forall \varepsilon > 0\ \exists u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \|u - \chi_{A_i}\|_p \leq \varepsilon$.
Wähle eine offene Menge O und eine kompakte Menge K mit $K \subset A_i \subset O$ und $|O \setminus K| \leq \varepsilon$ (Existenz: Maßtheorie). Dann existiert nach Lemma 2.13 ein $\varphi \in C_c^\infty(O)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf K. Es gilt:

$$\int_O |\chi_{A_i} - \varphi|^p = \int_{O\setminus K} |\chi_{A_i} - \varphi|^p \leq 2^p |O \setminus K| \leq 2^p \varepsilon.$$

□

SATZ 2.16. *Sei $(\rho_n)_{n\geq 1}$ ein Mollifier.*

(a) Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_p \to 0$.
(b) Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_\infty \to 0$

PROOF. (a) Nach Satz 2.15 existiert für $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Satz 2.6 liefert

$$\operatorname{supp}(\rho_n * g) \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + \operatorname{supp} g \subseteq K, \qquad \text{wobei } K \text{ kompakt.}$$

Da nach Lemma 2.12 $\rho_n * g$ gleichmässig auf K gegen g konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\rho_n * g - g\|_p^p = \int_K |\rho_n * g - g|^p \leq \varepsilon^p |K|.$$

Daraus folgt mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\rho_n * f - f\|_p &\le \|\rho_n * (f-g)\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g-f\|_p \\ &\le \|f-g\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g-f\|_p \le \varepsilon + \varepsilon |K|^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Wiederhole den Beweis von Lemma 2.12. □

KOROLLAR 2.17. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $1 \le p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

PROOF. Setze $\Omega_n := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\}$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \Omega_n \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt nach dem Satz von Lebesgue $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$, d.h für $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon$.
Setze $g_m := \rho_m * f_n$, wobei ρ_m ein Mollifier ist. Dann existiert nach Satz 2.16 ein $m_0 > n_0$ mit $\|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d} \le \varepsilon$, $m \ge m_0$. Des Weiteren gilt

$$\operatorname{supp} g_m = \operatorname{supp} \rho_m + \operatorname{supp} f_{n_0} \subset \Omega, \quad m \ge m_0.$$

Damit erhalten wir

$$\|g_m - f\|_{L^p(\Omega)} \le \|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\Omega)} + \|f_{n_0} - f\|_{L^p(\Omega)} \le 2\varepsilon, \quad m \ge m_0.$$

□

SATZ 2.18 (Zerlegung der Eins). *Seien Ω, $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Seien ferner*

$$K_i \subset \Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset \Omega, \qquad i \in \mathbb{N},$$

mit K_i, $\overline{\Omega}_i$ kompakt und

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i = \Omega,$$

so, dass für alle $x \in \Omega$ eine Umgebung $U(x)$ existiert, welche nur endlich viele Ω_j trifft (diese Überdeckung heißt lokal endlich*). Nehmen wir ferner an, dass $K_j \cap K_i = \emptyset$, falls $i \neq j$.*
Dann existieren $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$, $i \in \mathbb{N}$ mit

- *(a)* $\varphi_i \ge 0$
- *(b)* $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in \Omega$
- *(c)* $\operatorname{supp} \varphi_i \subset \Omega_i$
- *(d)* $0 \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i \le 1$.

Außerdem gilt $\varphi_j(x) = 1$ für $x \in K_j$.

PROOF. 1. Schritt: Nehmen wir an dass wir die folgende Situation haben

$$K_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$$

wobei $\overline{V}_j$ kompakt, $U_i \cap K_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ und V_j, U_j sind lokal endliche Überdeckungen von Ω. Wähle φ_j' nach Lemma 2.13 zu U_j und $\overline{V}_j$. Dann gilt $\varphi(x) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i'(x) > 0$, wobei lokal in Ω nur endlich viele Summanden von

0 verschieden sind. Setze $\varphi_j(x) := \varphi'_j(x)/\varphi(x)$. Nach Konstruktion haben die φ_j die gewünschte Eigenschaften.

2. Schritt, Disjunktisierung von Ω_j und K_j: $U_j := \Omega_j \setminus \bigcup_{i \neq j} K_i$. Natürlich gilt $K_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$. Wir behaupten, dass U_j offen ist. Sei $x \in U_j$ und $U(x) \subseteq \Omega_j$ eine Umgebung von x so, dass $J := \{i : \Omega_i \cap U(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Für $j \neq k \in J$ existiert eine Umgebung $W_k(x) \subseteq U(x)$ von x mit $W_k(x) \cap K_k = \emptyset$. Setze $W(x) := \cap_{k \in J} W_k(x)$, die ist eine Umgebung von x mit $W(x) \subseteq U_j$ und $W(x) \cap K_i = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, also U_j ist offen. Sei jetzt $x \in \Omega$, liegt dann $x \in \Omega_j$ für ein j, dann liegt es entweder in U_j oder in K_i für ein $i \neq j$. Die Überdeckung U_j ist lokal endlich, da Ω_j lokal endlich ist.

3. Schritt, Konstruktion von V_j: Sei $V_1 := U_1$. Angenommen V_j, $j < n$ konstruiert ist mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j = \Omega,$$

sei F_n eine abgeschlossene Umgebung von ∂U_n die erfüllt

$$\partial U_n \subseteq F_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Solche eine Umgebung existiert nach Bemerkung 2.14. Falls $U_n \neq 0$, können wir eine kleinere Umgebung $\partial U_n \subseteq F'_n \subseteq F_n$ finden damit $U_n \setminus F'_n$ nichtleer wird. Setze $V_n := U_n \setminus F'_n$. Dann

$$U_n \subseteq V_n \cup F'_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Also V_j ist eine offene Überdeckung, die natürlich lokal endlich bleibt. □

Satz 2.19 (Zerlegung der Eins). *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, mit $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann existiert $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$ mit*

(a) $\varphi_i \geq 0$
(b) $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in K$
(c) $0 \leq \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \leq 1$.
(d) $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \Omega_j$

Proof. Wähle V mit $\overline{V}$ kompakt und

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$$

nach Bemerkung 2.14. Setze $U_i ;= V \cap \Omega_i$ und verwende Satz 2.18 □

Bemerkung 2.20. *Das System $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heißt* der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins *zu K.*

3. Sobolev Räume I.

In diesem Abschnitt es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

DEFINITION 3.1 (Distributionelle Ableitung). *Sei $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Falls die Identität*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

gilt, heißT G die distributionelle Ableitung *von f, und wir schreiben $D^\alpha f = g$, $f^{(\alpha)} = g$ oder $f = \partial^\alpha g$.*

BEMERKUNG 3.2.

(a) Die distributionelle Ableitung ist eindeutig, insbesondere ist die obige Definition sinnvoll, denn

$$\int_\Omega (f-g)\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f - g = 0 \text{ fast überall.}$$

(b) Falls $f \in C^m(\Omega)$. Dann für jede $|\alpha| \leq m$ ist $D^\alpha f$ die klassische partielle Ableitung von f.

DEFINITION 3.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Definiere*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq m \ \exists D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

SATZ 3.4. *$W^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

PROOF. Klar: normierter Vektorraum. Um die Vollständigkeit zu zeigen, nehme $(f_n) \in W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge, d.h. die Folgen $(D^\alpha f_n) \subseteq L^p(\Omega)$ sind alle Cauchyfolgen. Daher konvergieren die auch, bezeichne die Grenzwerten mit f_α. Wir zeigen nun $D^\alpha f = f_\alpha$:

$$\int_\Omega f_\alpha \varphi \leftarrow \int_\Omega D^\alpha f_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_n D^\alpha \varphi \to (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi.$$

Die Behauptung folgt. □

SATZ 3.5. *Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $W^{m,p}(\Omega)$ separabel und reflexiv. $W^{m,1}(\Omega)$ ist separabel.*

PROOF. Definiere die stetige Abbildung

$$J : W^{m,p}(\Omega) \to \underbrace{L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)}_{M} =: X,$$

wobei $M =$ die Anzahl der Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$ ist, durch $(Jf)(x) := (D^\alpha f)_{|\alpha| \leq m}$. Dann ist J stetig invertierbar, bildet also auf einen abgeschlossenen Unterraum von X ab. Falls $1 \leq p < \infty$ ist, ist X separabel, ist zusätzlich $p > 1$, folgt die Reflexivität von X. □

LEMMA 3.6 (Lokale Approximation). *Sei* $1 \le p < \infty$, $f \in W^{m,p}(\Omega)$ *und* $D \subseteq \Omega$ *offen mit* $\overline{D} \subseteq \Omega$. *Betrachte* $\delta = \operatorname{dist}(D, \partial\Omega) > 0$ *und den Mollifier* η_ε, $\varepsilon < \delta$. *Setze* $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)$. *Dann* $f_\varepsilon \to f$ *in* $W^{m,p}(D)$.

PROOF.

$$\begin{aligned} D^\alpha f_\varepsilon(x) &= D^\alpha \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)(x) = \int_\Omega D^\alpha(\eta_\varepsilon(x-y)) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Träger!}}{=} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) D^\alpha f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (D^\alpha f)_\varepsilon(x), \quad x \in D. \end{aligned}$$

Also $f_\varepsilon \in W^{m,p}(D)$ und nach Satz 2.16 $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha f)_\varepsilon \to D^\alpha f$. ☐

SATZ 3.7. *Für* $1 \le p < \infty$ *ist* $W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ *dicht in* $W^{m,p}(\Omega)$.

PROOF. Betrachte eine lokal endliche Überdeckung Ω_k von Ω, $\overline{\Omega_k} \subseteq \Omega$ kompakt (siehe Satz 2.18). Sei φ_k Zerlegung der Eins, $\varepsilon > 0$ und $c_k > 0$ später noch zu bestimmen. Für $\varepsilon > 0$ existiert nach Lemma 3.6 $f_{k,\varepsilon} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega_k)$ mit $\|f - f_{k,\varepsilon}\|_{W^{m,p}(\Omega_k} \le c_k \varepsilon$. Setze

$$f_\varepsilon := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k f_{k,\varepsilon}, \text{ also } f_\varepsilon - f := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k (f_{k,\varepsilon} - f)$$

(lokal nur endlich viele Summanden). Die Produktregel gilt, denn für $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi_k f D_i \psi = \int_\Omega (D_i(\varphi_k \psi) - (D_i \varphi_k)\psi) f = -\int_\Omega ((\varphi_k \psi) D_i f + \psi f D_i \varphi_k).$$

Daher ist $\varphi_k f \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$D_i(\varphi_k f) = D_i \varphi_k \cdot f + \varphi_k D_i f.$$

Ferner gilt induktiv auch $\varphi_k f \in W^{m,p}(\Omega)$, und für $|\alpha| \le m$

$$D^\alpha(\varphi_k f) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \varphi_k \cdot D^\beta f.$$

Wir erhalten

$$D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k \in \mathbb{N}} D^{\alpha-\beta} \varphi_k (D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f).$$

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} &\le C \sum_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} \|D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le C\varepsilon \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k |\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} \le \varepsilon, \end{aligned}$$

falls $c_k \le 2^{-k}(\|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} + 1)^{-1}/C$. ☐

SATZ 3.8 (Produktregel). *Sei* $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und* $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $g \in W^{m,q}(\Omega)$. *Dann* $fg \in W^{m,1}(\Omega)$ *und* $D_i(fg) = D_i f \cdot g + f D_i g$.

PROOF. Sei $p < \infty$. Nehme $f_k \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $f_k \to f$. Wir haben gesehen $D_i(f_k g) = D_i f_k \cdot g + f_k D_i g$.

$$\int_\Omega D_i\varphi \cdot fg = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega D_i\varphi \cdot f_k g = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi D_i(f_k g)$$
$$= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(D_i f_k \cdot g + f_k D_i g) = -\int_\Omega \varphi(D_i f \cdot g + f D_i g).$$

Der Rest folgt mit Induktion. □

SATZ 3.9 (Kettenregel). *Seien* $\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen, und* $\Phi : \Omega' \to \Omega$ *ein* C^1-*Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen* $D\Phi$, $D\Phi^{-1}$. *Sei* $1 \le p \le \infty$. *Dann gilt für* $f \in W^{1,p}(\Omega)$:

(a) $f \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega')$.
(b) $\partial(f \circ \Phi) = \partial f \circ \Phi \cdot \partial\Phi$.

PROOF. ÜA. □

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \le p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$
$$W_0^{m,p}(\Omega)_+ := \{u \in W_0^{m,p} : u \ge 0 \text{ f.ü.}\},$$
$$C_c^\infty(\Omega)_+ := \{\varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \varphi \ge 0\}.$$

und

$$f^+ = \chi_{f>0} f,\ f^- = \chi_{f<0} f, \quad f \in L^p(\Omega).$$

LEMMA 3.10. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen.*

(a) $D_j f^+ = 1_{f>0} D_j f$, $D_j f^- = -1_{f<0} D_j f$ *fuer* $f \in W^{1,2}(\Omega)$
(b) $f \mapsto |f|,\ f^+,\ f_- : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)$ *stetig.*
(c) $C_c^\infty(\Omega)_+$ *dicht in* $W_0^{1,2}(\Omega)_+$.
(d) Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$, *supp*$(u) \subset\subset \Omega$, *d.h. es existiert ein offenes* $D \subset \Omega$ *mit* $\operatorname{supp} u \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega$. *Dann ist* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

PROOF. Ü.A. □

SATZ 3.11. *Sei* $I \ne \emptyset$ *ein offenes Interval und* $f \in W^{1,1}(I)$. *Dann existiert eine Nullmenge* N *so, dass für* $x, y \in I \setminus N$

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

gilt.

PROOF. Sei $f \in W^{1,1}(\Omega)$ und $f_k \in C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$ mit $f_k \to f$ in $W^{1,1}(I)$. Dann gilt

$$f_k(y) - f_k(x) = \int_x^y f_k'(z)\,\mathrm{d}z \to \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z.$$

Da f_k in $L^1(I)$ konvergiert, besitzt sie eine punktweis fast überall konvergente Teilfolge, also $\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(z) = f(z)$ für fast alle $z \in I$. $\square$

SATZ 3.12. *Sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Interval und $f, g \in L^1(I)$ mit*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(z)\,\mathrm{d}z \quad \textit{für } x, y \in I \setminus N,$$

für eine Nullmenge N. Dann ist $f \in W^{1,1}(I)$ und $f' = g$.

PROOF. Sei $\psi \in C_c^\infty(I)$, und $c, d \in I$ so, dass $\operatorname{supp}\psi \in [c, d]$ und $f(y) - f(c) = \int_c^y g(z)\,\mathrm{d}z$ für fast alle $y \in I$. Dann

$$\begin{aligned}\int_c^d \psi'(y)(f(y) - f(c))\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \int_c^y \psi'(y) g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_x^d \psi'(y)\,\mathrm{d}y g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_c^d \psi(x) g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\square$

SATZ 3.13. *Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Dann existiert ein $g \in C(\overline{I})$ so, dass $f = g$ fast überall.*

PROOF. Sei $I = (a, b)$. Definiere $h(y) := \int_a^y f'(z)\,\mathrm{d}z$. Die Funktion h ist stetig auf I, denn $f' \in L^1(I)$. Außerdem existiert $\lim_{x\to a,b} h(x)$, also $h \in C(\overline{I})$. Seien x, z so, dass $f(z) - f(x) = \int_x^z f'(z)\,\mathrm{d}z$. Sei $c := f(z) - h(z)$ und setze $g(y) := h(y) + c$. Nach Definition $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in I$. $\square$

BEMERKUNG 3.14. *Die obige Integralgleichung impliziert nicht nur Stetigkeit, sondern auch* Absolutstetigkeit. *Genauer ist Absolutstetigkeit äquivalent zu* (6) *(vgl. Maßtheorie).*

SATZ 3.15. *Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $I = (a, b)$. Dann sind die Einbettungen $W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ stetig. Falls $p > 1$, ist die Einbettung $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ kompakt.*

PROOF. Es ist klar, dass die Einbettungen

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I)$$

stetig sind.

Es bleibt zu zeigen, dass $W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ stetig ist. Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Nach Satz 3.11 existiert eine Nullmenge N mit

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x, y \in I \setminus N.$$

Dann gilt

$$|f(y)| = \Big| f(x) + \int_x^y f' \Big| \leq |f(x)| + \int_x^y |f'| \leq |f(x)| + \|f'\|_{L^1(I)}.$$

Integration bzgl. x über I liefert

$$(b-a)|f(y)| \leq \int_I |f(y)|\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^1(I)} + (b-a)\|f'\|_{L^1(I)}, \quad y \in I \setminus N,$$

d.h. $\|f\|_{L^\infty(I)} \leq C\|f\|_{W^{1,1}(I)}$. Da $C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$ dicht in $W^{1,1}(I)$ ist, folgt die Behauptung (Beachte: für $f \in C(\overline{I})$ gilt $\|u\|_{L^\infty(I)} = \|u\|_\infty$).
Nun sei $p > 1$ und $x, y \in I$ mit $x > y$. Dann gilt mit $1/p + 1/p' = 1$

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)|^p &\leq \Big(\int_x^y |f'| \Big)^p \overset{\text{Hölder}}{\leq} (x-y)^{p/p'} \int_x^y |f'|^p \leq (x-y)^{p/p'} \int_a^b |f'|^p \\ &\leq (x-y)^{p/p'} \|f\|^p_{W^{1,p}(I)}, \end{aligned}$$

d.h.

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{W^{1,p}(I)}, \quad f \in W^{1,p}(I).$$

Also ist $B_{W^{1,p}(I),1}(0) \subset C(I)$ gleichmäßig gleichgradig stetig. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Arzelà–Ascoli. $\square$

4. Sobolev Räume II. – Einbettungssätze

SATZ 4.1. *Für $1 \leq p < \infty$ ist der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Seien $\varepsilon > 0$, $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq B(0,2)$ und $\psi(x) = 1$ für $x \in \overline{B(0,1)}$. Setze $\psi_j(x) := \psi(x/j)$.
<u>Beh.</u> $\psi_j f \to f$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.
Die Produktregel (Satz 3.8) liefert

$$|D^\alpha(\psi_j f - f)| \leq C \sum_{\beta \leq \alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)| \cdot |D^{\alpha-\beta} f|,$$

also

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha(\psi_j f - f)|^p &\le C' \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_{\beta\le\alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&= C' \sum_{\beta\le\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&+ C' \sum_{\beta\le\alpha} \int\limits_{B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&= C' \sum_{\beta\le\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&\le C'' \sum_{\beta\le\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,j)} |D^{\alpha-\beta} f|^p \le \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

falls j groß genug ist.
Nun betrachten wir einen Mollifier (ρ_n). Dann hat $\rho_n * \psi_j f$ kompakten Träger und ist glatt. Nach Satz 2.9 und 2.16 gilt $D^\alpha(\rho_n * (\psi_j f)) = \rho_n * D^\alpha(\psi_j f) \to D^\alpha \psi_j f$ für $n \to \infty$. Sei also erst j groß und dann n genügend groß, so dass

$$\|f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \le \|f - \psi_j f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \|\psi_j f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon.$$

□

Satz 4.2. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

mit stetiger Einbettung, d.h. für eine Konstante C_p

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le C_p \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Proof. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $1 \le p < \infty$. Setze $G(s) := |s|^{p-1}s$. Dann gilt $\psi := G(\varphi) \in C_c^1(\mathbb{R})$ und $\psi' = G'(\varphi)\varphi' = p|\varphi|^{p-1}\varphi'$. Also erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$

$$G(\varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{x} p|\varphi(t)|^{p-1}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nach der Hölderschen Ungleichung folgt

$$|G(\varphi(x))| = |\varphi(x)|^p \le p\|\varphi\|_p^{p-1}\|\varphi'\|_p$$

und

$$|\varphi(x)| \le C\|\varphi\|_p^{(p-1)/p}\|\varphi\|_p^{1/p}.$$

Die Youngsche Ungleichung liefert

$$|\varphi(x)| \le C\frac{p-1}{p}\|\varphi\|_p + C\frac{1}{p}\|\varphi'\|_p \le C\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}. \tag{7}$$

Sei nun $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Nach Satz 4.1 existiert $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Mit (7) ist dann u_n eine Cauchyfolge in $L^\infty(\mathbb{R})$ und die Behauptung folgt. □

LEMMA 4.3. *Sei $d \geq 2$ und $f_1, \dots, f_d \in L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $1 \leq i \leq d$ setze*

$$\widetilde{x}_i := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$$

und sei

$$f(x) = f_1(\widetilde{x}_1) f_2(\widetilde{x}_2) \cdots f_n(\widetilde{x}_d) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|f_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

PROOF. Ü.A. □

THEOREM 4.4 (Sobolev). *Sei $1 \leq p < d$. Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^d), \qquad \text{mit } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$$

stetig und es existiert $C = C_{p,d}$ mit

$$\|f\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla f\|_{L^p} \qquad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

PROOF. *1. Schritt: $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$.*
Sei $1 \leq i \leq d$.

$$\begin{aligned} |u(x_1, x_2, \dots, x_d)| &= \Big| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) \, \mathrm{d}t \Big| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) \Big| \, \mathrm{d}t \\ &:= f_i(\tilde{x}_i). \end{aligned}$$

Also $\|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.
Es gilt $|u(x)|^d \leq \prod_{i=1}^d |f_i(\widetilde{x}_i)|$. Mit Lemma 4.3 folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d |f_i(\widetilde{x}_i)|^{\frac{1}{d-1}} \, \mathrm{d}x \leq \prod_{i=1}^d \big\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d-1}}.$$

Das heißt

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \big\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{1}{d}}. \tag{8}$$

Wir wenden (8) auf $|u|^t$, $t > 1$ anstatt auf u an. Also, mit $1/p + 1/p' = 1$

$$\begin{aligned}\|u\|^t_{L^{\frac{td}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{td}{d-1}}(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{d-1}{d}} \le \prod_{i=1}^d \big\|t|u|^{t-1}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\big\|^{\frac{1}{d}}_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\le t\prod_{i=1}^d \big\||u|^{t-1}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\big\|^{\frac{1}{d}}_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le t\|u\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^d)}\prod_{i=1}^d \big\|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\big\|^{\frac{1}{d}}_{L^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Wähle nun t so dass $\frac{td}{d-1} = p'(t-1)$, d.h. $t = \frac{d-1}{d}p^*$ (dann $t \ge 1$). Jetzt durch dividieren durch $\|u\|^{t-1}_{L^{p'(t-1)}(\mathbb{R}^d)}$ bekommen wir

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le t\prod_{i=1}^d \big\|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\big\|^{\frac{1}{d}}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

die Behauptung für $u \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$.

2. Schritt: Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 4.1 wähle $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le C\|\nabla u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. Dies zeigt auch dass u_k eine Cauchyfolge in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ ist, deshalb ist sie konvergent. Eine Teilfolge konvergiert dann fast überall, benutzen wir die selbe Bezeichnung $u_k(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$. Also $u_k \to u$ in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$, und $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. □

Bemerkung 4.5. *Es genügt* $C_{p,d} := \frac{(d-1)p}{d-p}$. *Die optimale Konstante ist bekannt aber kompliziert.*

Satz 4.6. *Sei* $1 \le p < d$. *Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d), \qquad r \in [p, p^*]$$

stetig.

Proof. Sei $p \le r \le p^*$. Für ein θ gilt $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Verwende dann die Interpolationsungleichung, die Youngsche Ungleichung und Theorem 4.4

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} &\le \|u\|^\theta_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|u\|^{1-\theta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le \theta\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + (1-\theta)\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \le \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\le C'\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

□

Theorem 4.7 (Morrey). *Es sei* $p > d$. *Dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

stetig. Ferner existiert ein $C := C_{d,p}$ *so, dass für alle* $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ *gilt*

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\theta\|\nabla f\|_{L^p} \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $\theta = 1 - \frac{d}{p}$.

Proof. *1. Schritt:* Sei $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Sei Q ein abgeschlossener Würfel $0 \in Q$ mit Seitenlänge r. Sei $x \in Q$, dann $u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx) \mathrm{d}t$. Daraus

$$|u(x) - u(0)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^d \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| |x_i| \, \mathrm{d}t \leq r \sum_{i=1}^d \int_0^1 \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t.$$

Sei $\bar{u} = |Q|^{-1} \int_Q u(x) \, \mathrm{d}x$. Dann $|\bar{u} - u(0)| \leq |Q|^{-1} \int_Q |u(x) - u(0)|$, und

$$\begin{aligned}
|\bar{u} - u(0)| &\leq \tfrac{r}{|Q|} \int_Q \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \tfrac{r}{r^d} \int_0^1 \int_Q \sum_{i=1}^d \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{r^{d-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^d \int_{tQ} \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \mathrm{d}y \cdot \tfrac{1}{t^d} \, \mathrm{d}t \\
&\leq \tfrac{1}{r^{d-1}} \int_0^1 \sum_{i=1}^d \Big(\int_Q \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right|^p \mathrm{d}y \Big)^{1/p} |tQ|^{1/q} \cdot \tfrac{1}{t^d} \, \mathrm{d}t \\
&\leq \tfrac{1}{r^{d-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{d/q} \int_0^1 \tfrac{t^{d/q}}{t^d} \, \mathrm{d}t = \tfrac{r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}.
\end{aligned}$$

Natürlich können wir das ganze für x anstatt für 0 wiederholen und auch Q verschieben, also

$$|\bar{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \text{für } x \in Q. \tag{9}$$

Daraus

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - \bar{u}| + |\bar{u} - u(y)| \leq \frac{2r^{1-d/p}}{1-d/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \text{für } x, y \in Q.$$

Sei nun $x, y \in \mathbb{R}^d$. Es existiert ein Würfel Q der Seitenlänge $r = 2|x - y|$ mit $x, y \in Q$.

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{C|x - y|^\theta}{1 - d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

2. Schritt: Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Approximiere mit $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Wie im Beweis von Theorem 4.4 folgt

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{C|x - y|^\theta}{1 - d/p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

3. Schritt: Wir zeigen $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Sei $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $Q \ni x$ der Einheitswürfel. Aus (9) folgt

$$|u(x)| \leq |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq \|u\|_{L^p(Q)} + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq C_{d,p} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Schließlich approximiere $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ mit $u_k \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. $\square$

SATZ 4.8 (Der Fall $p = d$). *Die Einbettung*

$$W^{1,d}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d), \qquad q \in [d, \infty)$$

ist stetig.

PROOF. Ohne Beweis. $\square$

KOROLLAR 4.9. *Sei $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1$) und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$

(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ *für alle* $r \in [p, \infty)$ $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$

(c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. *Setze*

$$k := \left[m - \frac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \frac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1$$

$\Longrightarrow$ *für jede* $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ *es existiert* C *mit*

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{W^{m,p}} \qquad \forall |\alpha| \leq k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leq C\|f\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta \qquad \text{fast alle } x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| = k.$$

Insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^d)$$

mit stetiger Einbettung.

PROOF. ÜA. $\square$

5. Sobolev Räume III. - Beschränkte Gebiete

NOTATION 5.1. *Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Dann $x = (x', x_d)$ mit $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $x' = (x_1, \ldots, x_{d-1})$. Wir setzen*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d_+ &:= \{x = (x', x_d) : x_d > 0\} \\ Q &:= \{x = (x', x_d) : |x'| < 1 \text{ und } |x_d| < 1\} \\ Q_+ &:= Q \cap \mathbb{R}^d_+ \\ Q_0 &:= \{x = (x', x_d) : |x'| < 1 \text{ und } x_d = 0\} \end{aligned}$$

DEFINITION 5.2. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann heißt Ω* von der Klasse C^m, *falls eine lokal endliche Überdeckung $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ des Randes und bijektive Abbildungen $\Phi_j : Q \to U_j$ existieren, so dass Φ_j, Φ_j^{-1} m-fach stetig differenzierbar mit* gleichmäßig *beschränkten Ableitungen sind und $\Phi_j(Q_+) = U_j \cap \Omega$ und $\Phi_j(Q_0) = U_j \cap \partial\Omega$ gelten.*

SATZ 5.3 (Fortsetzungsoperator). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und von der Klasse C^m oder $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. Dann existiert für $1 \leq p \leq \infty$ ein linearer Operator $F : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $u \in W^{l,p}(\Omega)$ mit $l \leq m$ gilt*

(a) $Fu\big|_\Omega = u$,
(b) $\|Fu\|_{W^{l,p}(\mathbb{R}^d)} \leq C_\Omega \|u\|_{W^{l,p}(\Omega)}$.

Beweisidee für $m = 1$ und Ω beschränkt: Nach Voraussetzung kann man $\overline{\Omega}$ mit $U_0 = \Omega$ und endlich vielen U_l überdecken. Die zugehörigen bijektiven Abbildungen bezeichnen wir wieder mit Φ_l. Betrachte eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins (φ_l). Die Funktionen $\varphi_l f$ (eingeschränkt auf $\Omega \cap U_l$) liegen in $W^{1,p}(\Omega \cap U_l)$. Sei einfach

$$\tilde{f}_0(x) := \begin{cases} g_0(x) & x \in U_0 \\ 0 & x \notin U_0 \end{cases}.$$

Für $l > 0$ definiere $g_l := (\varphi_l f) \circ \Phi_l$. Dann gehört g_l zu $W^{1,p}(Q_+)$ nach Satz 3.9. Setze g_l, $l > 0$ auf Q so fort:

$$\tilde{g}_l((x', x_d)) := \begin{cases} g_l((x', x_d)) & (x', x_d) \in Q_+ \\ g_l((x', -x_d)) & (x', x_d) \notin Q_+ \cup Q_0. \end{cases}$$

Es gilt $\tilde{g}_l \in W^{1,p}(Q)$ und $\|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C\|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}$ (dies ist noch zu beweisen!). Jetzt sei $\tilde{f}_l := \tilde{g}_l \circ \Phi_l^{-1}$. Dann gilt $\tilde{f}_l\big|_{\Omega\cap U_l} = (\varphi_l f)\big|_{\Omega \cap U_l}$ und $\tilde{f}_l$ ist null außerhalb von $\Phi_l^{-1}(Q)$. Betrachte jedes $\tilde{f}_l$ als eine Funktion definiert auf $\mathbb{R}^d$ (0 außerhalb U_l). Dann $\tilde{f}_l \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, also liegt die Funktion

$$\tilde{f} = \sum_{l=1}^{d} \tilde{f}_l$$

auch in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und sie ist eine Fortsetzung von f (nach Konstruktion). Die folgenden Abschätzungen gelten für $l > 0$:

$$\begin{aligned} \|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)} &\leq C\|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(\Omega\cap U_l)}, & \|g_l\|_{L^p(Q_+)} &\leq C\|\varphi_l f\|_{L^p(\Omega\cap U_l)} \\ \|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)} &\leq C\|g_l\|_{W^{1,p}(Q_+)}, & \|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)} &\leq C\|g_l\|_{L^p(Q_+)} \\ \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} &\leq C\|\tilde{g}_l\|_{W^{1,p}(Q)}, & \|\tilde{f}_l\|_{L^p(U_l)} &\leq C\|\tilde{g}_l\|_{L^p(Q)}, \end{aligned}$$

wobei die Konstante C nur von Ω, von der Überdeckung und von den zugehörigen Funktionen Φ_l abhängt. Also

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} &\leq \sum_{l=0}^{d} \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} = \sum_{l=0}^{d} \|\tilde{f}_l\|_{W^{1,p}(U_l)} \leq C' \sum_{l=0}^{d} \|\varphi_l f\|_{W^{1,p}(U_l\cap\Omega)} \\ &\leq C''\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Analog geht der Beweis für $l = 0$. □

Satz 5.4 (Dichtheit). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und von der Klasse C^m. Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ wobei $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Folge $(u_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_n\big|_\Omega \to u$ in $W^{m,p}(\Omega)$, d.h. die Menge*

$$\left\{ u\big|_\Omega : u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \right\}$$

ist ein dichter Unterraum von $W^{m,p}(\Omega)$.

Proof. Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ und betrachte Fu. Satz 4.1 liefert eine Folge $(v_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $v_n \to Fu$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$. Die Folge $u_n := v_n\big|_\Omega$ hat die gewünschten Eigenschaften. □

Korollar 5.5. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt von der Klasse C^1, oder $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. Sei $1 \le p < \infty$. Dann gilt*

(a) $1 \le p < d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$,
(b) $p = d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *für alle* $r \in [p, \infty)$,
(c) $p > d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) *Sei $p > d$ und $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$. Es gibt eine Konstante $C := C_{\Omega,p,d}$ mit*

$$|f(x) - f(y)| \le C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^\alpha \qquad \text{für alle } f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere ist die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \quad \text{stetig.}$$

Proof. ÜA. □

Korollar 5.6. *Sei $m \in \mathbb{N}$ ($m \ge 1$), $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt von der Klasse C^m und $1 \le p < \infty$. Dann gelten die folgende Aussagen*

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} > 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *mit* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}$,
(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ *für alle* $r \in [d, \infty)$,
(c) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) *Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. Setze*

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1$$

$\Longrightarrow$ *für jede $f \in W^{m,p}(\Omega)$. Dann existiert C mit*

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \qquad \text{für alle } |\alpha| \le k$$

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \le C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}|x-y|^\theta \quad \text{für fast alle } x, y \in \Omega,\ |\alpha| = k.$$

Insbesondere gilt

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$$

mit stetiger Einbettung.

Proof. Analog zu Korollar 5.5. □

Satz 5.7 (Charakterisierungen von Sobolev Funktionen). *Es sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \le \infty$. Äquivalent sind*

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$
(b) *Es existiert $C > 0$*

$$\left|\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| \le C\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1, \dots, d.$$

(c) *Es existiert ein $C > 0$, so dass für jedes $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$ gilt*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} \leq C|h|.$$

BEMERKUNG 5.8. *Es kann $C = \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$ gewählt werden.*

Falls $p = 1$, so gilt (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)

PROOF. ÜA. □

SATZ 5.9. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $1 \leq p < \infty$ und $M \subseteq L^p(\Omega)$ beschränkt. Es gelte*

(a) *für alle $\varepsilon > 0$ und $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ existiert ein $0 < \delta < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$ mit*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \varepsilon \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^d \text{ mit } |h| < \delta \text{ und für alle } f \in M,$$

wobei $(\tau_h f)(x) = f(x + h)$.

(b) *für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\Omega' \subseteq \Omega$ mit $\overline{\Omega'}$ kompakt in Ω, so dass*

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in M.$$

Dann ist M relativ kompakt in $L^p(\Omega)$.

PROOF. (Skizze). Wir betrachten zunächst den Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$. Nach Voraussetzung (b) können wir $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'}$ kompakt in Ω wählen, so dass ein $C > 0$ mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega')} \leq C\varepsilon, \quad f \in M. \tag{10}$$

existiert. Sei η_n ein Mollifier und $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\|\eta_n * \Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{h \in B(0,\varepsilon)} \|\tau_h \Phi - \Phi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{11}$$

Da $C_c(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ ist, existiert für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ eine Folge $(\Phi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{j \to \infty} \Phi_j = f$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \eta_n * \Phi_j = \eta_n * f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d),$$
$$\lim_{j \to \infty} \tau_h \Phi_j = \tau_h f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^d).$$

Damit folgt aus (11) und (a), dass

$$\lim_{n \to \infty} \|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} = 0$$

gleichmäßig für alle $f \in M$, d.h. es existiert ein $C > 0$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\eta_n * f - f\|_{L^p(\Omega')} < C\varepsilon, \quad f \in M. \tag{12}$$

Wegen $\eta_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt insbesondere $\eta_n * f \in C(\overline{\Omega'})$. Mit Arzela-Ascoli folgt nun, dass

$$M' = \{\eta_n * f : f \in M\}$$

relativ kompakt ist.

Somit existieren nach (Adams, Sobolev Spaces) Theorem 1.19 (*Total beschränkt*) eine endliche Menge von Funktionen $\{\psi_1, \dots, \psi_m\} \subset C(\overline{\Omega'})$ mit

$$M' \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\psi_i, \varepsilon).$$

Daher existiert ein $C > 0$, so dass für $f \in M$ ein $j \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$|\psi_j(x) - (\eta_n * f)(x)| < C\varepsilon, \quad x \in \overline{\Omega'} \tag{13}$$

existiert. Bezeichne die Erweiterung mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ von ψ mit $\tilde{\psi}$. Dann folgt aus (10), (11), (12) und (13), dass

$$\|f - \tilde{\psi}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

für ein $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt, d.h.

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(\tilde{\psi}_i, \varepsilon).$$

Daher ist M relativ kompakt.
Der allgemeine Fall folgt aus dem Spezialfall, wenn man die Menge $\tilde{M} = \{\tilde{f} : f \in M\}$, wobei $\tilde{f}$ die Erweiterung mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ von f bezeichnet, betrachtet. (s. Adams, Sobolev Spaces, Theorem 2.32) □

THEOREM 5.10 (Rellich). *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt der Klasse C^1. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann gilt*

(a) $p < d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $r \in [1, p^*)$, wobei $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$ erfüllt ist;
(b) $p = d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $r \in [1, \infty)$;
(c) $p > d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$

jeweils mit kompakter Einbettung.

PROOF. (a) Sei B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir verwenden Satz 5.9. Sei $1 \leq r < p^*$. Dann existiert ein $\theta \in (0, 1]$ mit $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p^*}$. Sei $\Omega' \subseteq \overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$. Die Interpolationsungleichung 1.11 und 5.7 liefern

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^r(\Omega')} &\leq \|\tau_h u - u\|^{\alpha}_{L^1(\Omega')} \|\tau_h u - u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\Omega')} \\
&\leq |h|^{\alpha} \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^1(\Omega)} (2\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \\
&\leq C|h|^{\alpha} \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\alpha}_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C|h|^{\alpha},
\end{aligned}$$

falls $u \in B$. Ferner gilt für solche u

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^r(\Omega \setminus \Omega')} = \Big(\int\limits_{\Omega \setminus \Omega'} |u(x)|^r \,\mathrm{d}x \Big)^{1/r} &\leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \Omega')} |\Omega \setminus \Omega'|^{1-r/p^*} \\
&\leq |\Omega \setminus \Omega'|^{1-r/p^*} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

falls Ω' geeignet gewählt ist.

(b) Analog.
(c) Sei $p > d$. Sei B die Einheitskugel in $W^{1,p}(\Omega)$. Es ist zu zeigen, dass B relativ kompakt in $C(\overline{\Omega})$ ist. Korollar 5.5 liefert

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \qquad \forall f \in B,$$

mit $\alpha > 0$, d.h. B ist gleichmäßig gleichgradig stetig. Der Satz von Arzelà–Ascoli liefert die Behauptung.

$\square$

Satz 5.11. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und von der Klasse C^1. Es sei $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $1 \leq p < \infty$. (Erinnerung: falls $p > d$, dann $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$). Dann ist $u = 0$ auf $\partial\Omega$ genau dann, wenn $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Proof. Ohne Beweis. $\square$

Satz 5.12 (Poincaré Ungleichung). *Sei $\emptyset \neq \Omega$ offen und beschränkt. Dann existiert $C_\Omega > 0$ mit*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{für alle } f \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Proof. Sei $f \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\Omega \subseteq [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, und definiere $f = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned} |f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_d)|^p &= |f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_d) - f(x_1, \ldots, a_i, \ldots x_d)|^p \\ &= \Big| \int_{a_i}^{x_i} D_i f(x_1, \ldots, y_i, \ldots x_d) \Big|^p \, \mathrm{d}y_i \\ &\leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{x_i} |D_i f|^p \leq (b_i - a_i)^{p/q} \int_{a_i}^{b_i} |D_i f|^p. \end{aligned}$$

Daher

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (b_i - a_i)^{p/q} (b_i - a_i) \|D_i f\|_{L^p(\Omega)}^p = (b_i - a_i)^p \|D_i f\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Da $(\sum_{i=1}^d |D_i f|^p)^{1/p} \leq M|\nabla f|$, so erhalten wir die gewünschte Ungleichung. $\square$

Satz 5.13 (Einbettungssätze für $W_0^{1,p}(\Omega)$). *Die obigen Einbettungssätze gelten auch für $W_0^{1,p}$-Räume.*

Proof. Klar, da $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Bemerkung 5.14 (Vektorwertige Sobolev-Räume). *Sei $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Wir definieren*

$$W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{f = (f_1, \ldots, f_m) : f_i \in W^{k,p}(\Omega), \ i = 1, \ldots, m\}.$$

Dann gelten die Sätze für $W^{k,p}(\Omega)$ auch für vektorwertige Sobolev-Räume.

Proof. Sätze komponentenweise anwenden. $\square$

6. Sobolev Räume IV. Spuroperatoren

SATZ 6.1 (Spursatz (Halbraum)). *Sei $1 \le p < \infty$. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildungen $\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} : W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \to L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ mit*

$$\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u = u|_{\mathbb{R}^{d-1}}, \quad u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+}).$$

PROOF. Ü.A. □

SATZ 6.2. *Sei $1 \le p < \infty$. Dann gilt:*

$$u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \Leftrightarrow \Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u = 0$$

PROOF. Die Richtung von links nach rechts ist klar. Sei nun $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ mit $\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u = 0$ und $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$. Bezeichnen wir die Fortsetzung von u mit 0 auf $\mathbb{R}^d$ wieder mit u, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u \varphi &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u_n \varphi \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(-\int_{\mathbb{R}^d} u_n D^\alpha \varphi + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_n \varphi \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u_n D^\alpha \varphi, \quad |\alpha| \le 1, \ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),
\end{aligned}$$

da

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} u_n \varphi \le \|\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d-1})} \to 0.$$

Daher liegt $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Da $h \mapsto T_{\vec{h}} u$ (vgl. 1. Übungsblatt) für $\vec{h} = (0, 0, 0, \dots, h)$ eine stetige Abbildung mit Werten in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ist, folgt die Behauptung nach Lemma 3.10 (d). □

SATZ 6.3 (Spursatz). *Sei $1 \le p < \infty$ und $\emptyset \ne \Omega \subset \mathbb{R}^d_+$ beschränkt und von der Klasse C^1. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildungen $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ mit*

$$\Gamma_\Omega u = u|_{\partial\Omega}, \quad u \in C_c^\infty(\overline{\Omega}).$$

PROOF. Nach Voraussetzung existiert eine Überdeckung U_j des Randes von Ω. Wir bezeichnen wieder die zugehörigen Diffeomorphismen mit Φ_j. Weiter sei φ_j ein der Überdeckung U_j untergeordnete Zerlegung der Eins und $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \le \psi \le 1$ und $\operatorname{supp} \varphi \subset\subset \{\psi \equiv 1\}$. Wir definieren

$$\Gamma_\Omega u := \sum \varphi_j (\Gamma_{\mathbb{R}^d_+} (\psi_j u) \circ \Phi_j) \circ \Phi_j^{-1}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\Gamma_\Omega u)(x) &= \sum \varphi_j(x)(\Gamma_{\mathbb{R}^d_+}(\psi_j u)\circ\Phi_j)\circ\Phi_j^{-1}(x)\\ &= \sum \varphi_j(x)((\psi_j u)\circ\Phi_j)\circ\Phi_j^{-1}(x) = \sum \varphi_j(x)((\psi_j u)(x))\\ &= u(x), \quad u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

□

SATZ 6.4. *Sei $1\le p<\infty$, $\emptyset\neq\Omega\subset\mathbb{R}^d$ und von der Klasse C^1. Dann gilt:*

$$u\in W_0^{1,p}(\Omega)\Leftrightarrow \Gamma_\Omega u=0, u\in W^{1,p}(\Omega).$$

PROOF. Ü.A. Lokalisierung unter Verwendung von Satz 6.2. □

BEMERKUNG 6.5. *Es stellt sich die Frage, ob die Abbildung $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega)\to L^p(\Omega)$ surjektiv ist, d.h. man kann jede L^p-Funktion auf dem Rand ins Innere fortgesetzt werden?*

Antwort: *Nein, man kann aber zeigen, dass $\Gamma_\Omega : W^{1,p}(\Omega)\to W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega)$ für $1<p<\infty$ surjektiv ist. Hier:*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u\in L^p(\Omega) : \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty \right\}, \quad s\in(0,1).$$

7. Elliptische Randwertprobleme

NOTATION 7.1. *Die Sobolevräume werden im Falle $p=2$ mit $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$ bzw. mit $H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega)$ bezeichnet.*

BEMERKUNG 7.2. *Die Räume H^m und H_0^m sind Hilberträume mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f,g\rangle := \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega D_\alpha f\overline{D_\alpha g}.$$

Insbesondere sind sie reflexiv. Die Norm ist hier gegeben durch das Skalarprodukt

$$\|f\| := \langle f,f\rangle^{1/2} := \Big(\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \big|D_\alpha f\big|\Big)^{1/2},$$

welches zu der $W^{m,2}$-Norm äquivalent ist.

Im Folgenden nehmen wir stillschweigend $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ an, aber natürlich gelten die Resultate auch im Falle $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

LEMMA 7.3. *Sei $(u_n)\subseteq H^1(\Omega)$ schwach konvergent gegen ein u. Dann konvergiert u_n in $L^2(\Omega)$ gegen u.*

PROOF. Die Einbettung $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt (siehe Theorem 5.10). Nehmen wir an, dass eine Teilfolge u_{n_k} existiert mit $\|u_{n_k}-u\|_{L^2(\Omega)}\ge\varepsilon$ für ein festes $\varepsilon>0$ und für alle n_k, diese Teilfolge wird auch mit u_n bezeichnet. Da (u_n) beschränkt in $H^1(\Omega)$ ist, hat es eine $L^2(\Omega)$-konvergente

Teilfolge $u_{n_k} \to u'$. Aber $u_{n_k} \to u$ schwach in $H^1(\Omega)$ also auch schwach in $L^2(\Omega)$, was zu dem Widerspruch $u' = u$ führt. □

BEMERKUNG 7.4. *Natürlich gilt das obige Resultat für $W^{1,p}$ Räume so lange $1 < p < \infty$ ist.*

7.1. Elliptische Gleichungen 2. Ordnung mit Dirichlet Randbedingungen. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Seien $a_{ji} = a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq n$ und $a_0 \in C(\Omega)$, $a_0(x) \geq 0$ für jedes $x \in \Omega$. Wir setzen im Folgenden die sogenannte *Elliptizitätsbedingung* voraus:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > \alpha|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $\alpha > 0$.

PROBLEM 7.5 (Dirichlet-Randbedingung). *Finde $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit*

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big) + a_0 u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Klassische Lösung: Eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$, welche (P) erfüllt.

Schwache Lösung: Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\text{(SP)} \qquad +\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Schritt 1: Klassische Lösungen sind auch schwache Lösungen
Falls $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt auch $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Da $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, liegt u in $H_0^1(\Omega)$ (siehe Satz 5.11). Multiplikation mit $v \in C_c^\infty(\Omega)$ und partielle Integration liefern (SP) für $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Der Dichtesatz 3.7 gibt (P) für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.
Schritt 2: Existenz von schwachen Lösungen
Seien nun $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung u des schwachen Problems (SP), mit

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer von f unabhängigen Konstanten C.

PROOF. Setze

$$a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv,$$

$$b(v) := \int_\Omega fv, \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

Dann ist a eine stetige Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned}|a(u,v)| &\le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C'\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass das lineare Funktional b stetig ist. Die Bilinearform a ist auch koerziv, denn

$$\begin{aligned}a(u,u) &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u^2\Big) \overset{\text{ellipt.}}{\ge} \int_\Omega \alpha|\nabla u|^2 + a_0\int_\Omega |u|^2\\ &\ge \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \varepsilon\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + (\alpha-\varepsilon)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\overset{\text{Poincaré}}{\ge} \varepsilon\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \tfrac{(\alpha-\varepsilon)}{C_\Omega^2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \varepsilon\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \Big(\tfrac{\alpha}{C_\Omega^2} - \varepsilon\Big(1+\tfrac{1}{C_\Omega^2}\Big)\Big)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ folgt die Koerzivität von a. Verwendung vom Lax–Milgram Lemma liefert die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung (vgl. ÜA).

Die schwache Lösung u erfüllt

$$\|u\|^2_{H_0^1} \le \frac{1}{\varepsilon}a(u,u) = \frac{1}{\varepsilon}b(u) = \int_\Omega fu \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dies zeigt $\|u\|_{H_0^1} \le \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_{L^2(\Omega)}$, also die gewünschte Normabschätzung. □

Schritt 3: Regularität der Lösung
Seien $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ für alle $x \in \Omega$ und Ω offen, beschränkt, von der Klasse C^2. Sei $f \in L^2(\Omega)$, $u \in H_0^1(\Omega)$ schwache Lösung von (P). Dann

(a) $u \in H^2(\Omega)$ und $\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c\|f\|_{L^2(\Omega)}$.
(b) Ist $f \in H^m(\Omega)$ und $\partial\Omega$ der Klasse $C^{m+2} \Longrightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$ und $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \le C\|f\|_{H^m(\Omega)}$.

PROOF. Siehe Kapitel8 . □

KOROLLAR 7.6. *Sei $f \in H^m(\Omega)$ und $u \in H^{m+2}(\Omega)$ die schwache Lösung von* (P). *Die Sobolevsche Einbettungsätze 4.9 geben $W^{l,p}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega)$, falls $l > 2 + d/p$. Für $p = 2$ und $m > d/2$ gilt $u \in H^{m+2}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$.*

Schritt 4: Rückkehr zur klassischen Lösung
Sei $f \in H^m(\Omega)$ mit $m > d/2$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$. Nach Satz 5.11 $u|_{\partial\Omega} = 0$. Ferner partielle Integration und Dichtheitsargument liefern die Existenz klassischer Lösungen.