KAPITEL 1

Einführung in die Problematik

1. Physikalische Motivation

Betrachte einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung. Nun wollen wir untersuchen wie die Wärme geleitet wird.
Annahmen:

- Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0,1]$, $u(t,x) =$ Temperatur in x zum Zeitpunkt t.
- Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Wärmequelle
- Energie in Segment $[x_1, x_2]$: $E(x_2, x_1, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(t, x_1)$
- Wärmeleitungsregel von Fourier: Sei $Q(t,x) =$ die Wärme durch Punkt x zum Zeitpunkt t

$$\frac{Q(t_2,x) - Q(t_1,x)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x) \qquad K_0 \text{ Thermale Konduktivität}$$

- Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} &c\rho(x_2 - x_1)(u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)) \\ &= (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_1) - \frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_2)\Big). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x}u(t_1, x_1)}{x_2 - x_1}$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{f(x)}{c\rho} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x), \tag{1}$$

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die thermische Diffusivität (eine Konstante) ist.

Stationäre Temperaturverteilung (Gleichgewicht, steady state):

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) \overset{u(t,x)=v(x)}{\Longrightarrow} 0 = f(x) + \Delta v(x) \Longrightarrow \Delta v(x) = -f(x).$$

2. Mathematische Problemstellung

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

Gegeben: Stetige Funktion f auf $\overline{\Omega}$.

Gesucht: Stetige Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, in Ω zweimal differenzierbar mit

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0(x) & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Anwendung: Potential eines Ladungsfreies elektrisches Feldes.

u stationäre Temperaturverteilung

BEMERKUNG 2.1. Δ *ist ein linearer Operator* $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$.

Idee: Definiere den Laplace-Operator in geeigneten Räumen und untersuche Abbildungsvorschriften.
Sei z.B. $X := \{h : h \in C^2(\overline{\Omega}), h\big|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $Y := C(\overline{\Omega})$ und betrachte $\Delta_{XY} : X \to Y$.
Typische Fragestellungen:

(a) Ist Δ_{XY} injektiv (d.h. die Lösung der Gleichung ist eindeutig, falls sie existiert)
(b) Ist Δ_{XY} surjektiv (d.h. es existiert eine Lösung der Gleichung für alle $f \in Y$).
(c) Finde möglichst einen großen Raum Y so dass Δ_{XY} surjektiv ist (d.h. die Gleichung ist für viele f lösbar).
(d) Da X typischerweise nicht explizit gegeben ist, finde möglichst viele Eigenschaften von X (d.h. Eigenschaften der Lösung).

BEMERKUNG 2.2. *(a) Der Laplace-Operator besitzt keine guten Eigenschaften in $C(\overline{\Omega})$. Suche nach geeigneten Räumen führt auf* Sobolev-Räume *(reflexive Banachräume bzw. Hilberträumen).*

Idee (L_2-Theorie):

(a) Die Existenz einer *schwachen* Lösung lässt sich im Hilbertraumfall (L_2-Theorie) sehr einfach über Lax-Milgram zeigen.
(b) Regularitätstheorie liefert dann eine *starke* bzw. *klassische* Lösung.

BEMERKUNG 2.3. *Eine wichtige Rolle bei der Regularitätstheorie spielt die sogenannte Lokalisierung.*

Idee (L_p-Theorie):

(a) Betrachten zunächst
$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$
(b) Benutze die sog. *Fouriertransformation*. Die zentrale Eigenschaft dieser Abbildung ist, dass sie Differentialausdrücke in algebraische umwandelt. Im Fall $(\lambda - \Delta)$ erhält man
$$(\lambda + |\xi|^2)\mathcal{F}u = \mathcal{F}f.$$
Damit ist die formale Inverse von $(\lambda - \Delta)$ durch $u = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}f$ gegeben.

Typische Fragestellungen:

(a) Wie kann man dem formalen Ausdruck $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ als Operator: $Y \to X$ einen Sinn zu geben?
(b) Finde hinreichende Bedinungen, so dass $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ ein beschränkter Operator in L_p ist.

BEMERKUNG 2.4. *Auf diesem Weg werden wir auch erkennen, dass sich* $T = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ *auch als Integraloperator, d.h.* $Tf(x) = \int k(x,y)f(y)dy$, *darstellen lässt.*

Im letzten Abschnitt betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung (1).
Idee:

(a) Betrachte u als Funktion $t \to u(t,\cdot) \in X$, X ein Funktionenraum (Sobolevraum)
(b) Sei Δ der Laplaceoperator und betrachte

$$\begin{aligned} u'(t) - \Delta u(t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL im Banachraum!
(c) Ana III: Lösung ist $\mathrm{e}^{\Delta t}u_0$.

Typische Fragestellungen

(a) Vernüftige Definition für e^{tA} für große Klassen von (Differential-)operatoren.
(b) Suche Bedingungen an A, so dass e^{tA} wohldefiniert ist

BEMERKUNG 2.5. *Für spezielle (in Physik und Ingenieurwissenschaften sehr relevante) Klassen von Differentialoperatoren, sog.* Divergenzoperatoren, *lässt sich zeigen, dass* e^{tA} *wieder ein Integraloperator ist (z.B. Laplace auf* beliebigen *offenen Mengen).*

KAPITEL 2

Soboleträume

1. L_p Räume (Erinnerung)

In diesem Abschnitt sei (M, Σ, μ) stets ein Maßraum.

DEFINITION 1.1.

(a) Sei $1 \leq p < \infty$. *Setze* $\|f\|_p := \Big(\int\limits_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$.

(b) Sei $f : M \to \mathbb{K}$ *messbar. Dann heißt* f wesentlich beschränkt*, falls ein* $\alpha > 0$ *existiert mit* $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. *Ferner heißt*

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : \ \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\} = 0)\}$$

das wesentliche Supremum von f.

(c) Sei $1 \leq p \leq \infty$. *Definiere*

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K}) := \big\{f : f : M \to \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\big\}.$$

BEMERKUNG 1.2.

(a) $\|\cdot\|_p$ *ist eine Halbnorm auf* $\mathcal{L}^p$.

(b) Sei $f \in \mathcal{L}^p$. *Dann ist* $\|f\|_p = 0$ *genau dann wenn*

$$f \in \mathcal{N} := \{f : \ \ f \text{ messbar und } f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

(c) $\mathcal{L}^p$ *ist ein Vektorraum.*

(d) $\mathcal{N}$ *ist ein Unterraum von* $\mathcal{M}$*, dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von* $\mathcal{L}^p$*), und*

$$f \sim g \quad \overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \quad f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation

DEFINITION 1.3. *Der Raum* L^∞ *ist definiert durch:*

$$L^\infty(M, \mu) := \mathcal{L}(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty, \qquad \forall [f] \in L^\infty.$$

SATZ 1.4.

(a) $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ*-fast überall.*

(b) $\|\cdot\|_\infty$ *ist ein Norm.*

(c) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \implies$ *es existiert ein* $A \in \Sigma$ *mit* $\mu(A^c) = 0$ *und* $f_n \to f$ *gleichmässig auf* A.

(d) $(L^\infty(M, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

Definition 1.5. *Sei $1 \leq p < \infty$*

$$L^p(M,\mu) := (M,\Sigma,\mu,\mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \qquad \forall [f] \in L^p.$$

Satz 1.6 (Höldersche Ungleichung). *Es sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ (interpretiere $1/\infty = 0$). Desweiteren seien $f \in L^p(M,\mu)$ und $g \in L^q(M,\mu)$. Dann ist $f \cdot g \in L^1(M,\mu)$ und*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Proof. Die Fälle $p = 1, \infty$ sind trivial. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $f, g \neq 0$. Dann gilt

$$ab \leq \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q} \qquad \text{(Youngsche Ungleichung).}$$

(Der Beweis dieser Ungleichung ist elementar.) Natürlich ist fg messbar. Seien $G := g/\|g\|_q$ und $F := f/\|f\|_p$. Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt $x \in M$ ergibt nach Integration

$$\int\limits_M |F(x)G(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int\limits_M \frac{|F(x)|^p}{p} \,\mathrm{d}\mu(x) + \int\limits_M \frac{|G(x)|^q}{q} \,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt. □

Satz 1.7 (Minkowskische Ungleichung). *Sei $1 \leq p < \infty$ und $f, g \in L^p(M,\mu)$. Dann gilt*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Satz 1.8 (Riesz–Fischer). *Sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist $L^p(M,\mu)$ vollständig.*

Satz 1.9. *Nehmen wir an, dass $f_n \in L^p(M,\mu)$ gegen $f \in L^p(M,\mu)$ konvergiert, dann existiert eine Teilfolge f_{n_k}, so dass $f_{n_k}(x)$ μ-fast überall konvergiert.*

Satz 1.10 (Dualität). *Sei $1 \leq p < \infty$, und (M,Σ,μ) σ-endlicher Maßraum. Sei $1/p + 1/q = 1$ (so genannte* konjugierte Exponente*). Dann definiert $L^q(M,\mu) \to L^p(M,\mu)'$*

$$J(g)f := \int\limits_M f \cdot g \,\mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^q(M,\mu),\ f \in L^p(M,\mu).,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

Proof. J ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist J linear. J ist isometrisch, denn sei $g \in L^q(M,\mu)$ und setze

$$f := \frac{\overline{g}}{|g|}\Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^{q/p}.$$

Dann

$$\|f\|_p = \int\limits_M \left(\frac{|\overline{g}|}{|g|}\right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \,\mathrm{d}\mu = 1$$

und $\int_M fg \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen.

1. Fall $\mu(M) < \infty$*:* Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Betrachte $\nu : \Sigma \to \mathbb{K}$, $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$ ($\chi_A \in L^p(M,\mu)$). ν ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist ν absolut stetig bezüglich μ, denn $A \in \Sigma$ und $\mu(A) = 0$ impliziert $\chi_A = 0$ μ-fast überall, d.h. $\chi_A = 0$ in $L^p(M,\mu)$, also $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$. Satz von Radony–Nikodým ergibt $g \in L^1(M,\mu)$ mit

$$\nu(A) = \int\limits_A g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M \chi_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Also wegen Linearität

$$\varphi(f) = \int\limits_M fg \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \text{ Treppenfunktionen } f. \tag{3}$$

Ferner $|\varphi(f)| \le C'\|f\|_\infty$. Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^\infty(M,\mu)$ also gilt (3) für $f \in L^\infty(M,\mu)$. Wir zeigen nun $g \in L^q(M,\mu)$. Sei erst $q < \infty$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

f ist messbar und $|g|^q = fg = |f|^p$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in M : |f(x)| \le n\}$. Dann ist $\chi_{A_n} f \in L^\infty(M,\mu)$ und

$$\begin{aligned} \int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu &= \int\limits_M \chi_{A_n} fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \le \|\varphi\| \|\chi_{A_n} f\|_p = \\ &= \|\varphi\| \Big(\int\limits_{A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} = \|\varphi\| \Big(\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \\ &\Longrightarrow \quad \int\limits_{A_n} |g|^q \le \|\varphi\|^q \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz von Beppo Levi(monotone Konvergenz) gibt $g \in L^q(M,\mu)$.
Jetzt betrachten wir der Fall $q = \infty$. Dann $|g| \le \|\varphi\|$, denn sei $A := \{x \in X : |g(x)| > \|\varphi\|\}$. Setze $f := \chi_A |g|/g$, $f \in L^\infty(M,\mu)$. Nehmen wir $\mu(A) > 0$ an.

$$\mu(A)\|\varphi\| < \int\limits_A |g| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_M fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(f) \le \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme $\Longrightarrow \mu(A) < \|f\|_1$, Widerspruch mit $\mu(A) = \|f\|_1$. Also $g \in L^\infty(M,\mu)$.

Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(M,\mu)$ also $\varphi = Jg$.

2. Fall, $\mu(M) = \infty$*:* Es sei $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ mit $\mu(M_n) < \infty$, und M_n paarweise disjunkt. Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Setze $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$, für $f \in L^p(M_n,\mu_n)$, wobei $\mu_n(A) := \mu(M_n \cap A)$. Dann $\|\varphi_n\| \le \|\varphi\|$, insbesondere $\varphi_n \in L^p(M_n,\mu_n)'$. Verwende jetzt den ersten Fall um $g_n \in L^q(M_n,\mu_n)$ zu bekommen. Setze $g := \sum_{n=1}^\infty g_n$ (in jedem Punkt nur ein Summand, g_n wird durch 0 fortgesetzt auf M_n^c). Es ist $g \in L^q(M,\mu)$ und $\varphi = Jg$ zu zeigen. Sei $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$ und f wie in (4)

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^n \int\limits_{M_j} fg \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \int\limits_{M_j} \chi_{M_j} f g_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f)\\ &= \varphi(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f) \leq \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p\\ &= \|\varphi\| \cdot \Big(\sum_{j=1}^n \int\limits_M |\chi_{M_j} f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \Big(\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\int_{A_n} |g|^q \mathrm{d}\mu \leq \|\varphi\|$, und nach Beppo Levi Theorem $g \in L^q(M,\mu)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(f) = \varphi(\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} f) &= \lim_{n\to\infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} fg\\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_M \chi_{A_n} fg \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int\limits_M fg.\end{aligned}$$

□

Satz 1.11 (L^p Interpolation Ungleichung). *Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(M,\mu) \cap L^{p_1}(M,\mu)$, dann ist $f \in L^{p_\theta}(M,\mu)$ und es gilt*

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

Proof. Setze $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$ und $h := |f|^{\theta p_\theta}$. Dann ist $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$, ferner $g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(M,\mu)$ und $h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(M,\mu)$ und

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \leq \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. □

Satz 1.12 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung). *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p_i \leq \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1, \ldots, m$. Sei ferner $1 \leq p \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \textit{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_p \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

Proof. ÜA. □

Definition und Satz 1.13. *(a) $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) := L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu)$ versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$ ist ein Banachraum.*

(b) Definiere

$$L^1 + L^\infty(M,\mu) := \{f : M \to \mathbb{K} \text{ mb.} : \exists g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu) \text{ mit } f = g + h\}.$$

Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty :\ f = g + h : h \in L^1(M,\mu),\ g \in L^\infty(M,\mu)\}.$$

ist eine Norm, mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

SATZ 1.14. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt $L_p(M,\mu) \subseteq L_1 + L_\infty(M,\mu)$.*

PROOF. Der Fall $p = \infty$ ist trivial. Sei $f \in L^p(M,\mu)$. Setze $A := \{x \in M : |f(x)| \ge 1\}$ und $h := \chi_A f$, $g := \chi_{M\setminus A} f$. Dann $g \in L^\infty(M,\mu)$ und $h \in L^1(M,\mu)$, denn

$$\int_M |h| \,\mathrm{d}\mu = \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu \le \int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

□

THEOREM 1.15 (Riesz–Thorin Konvexitätstheorem). *Sei $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$ linear, ferner seien $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1,\infty]$ mit $p_0 < p_1$ und $r_0 < r_1$. Sei $\alpha \in (0,1)$ und setze*

$$\tfrac{1}{p_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{p_0} + \tfrac{\alpha}{p_1} \qquad \text{und} \quad \tfrac{1}{r_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{r_0} + \tfrac{\alpha}{r_1}.$$

Dann gilt

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_\alpha},L^{r_\alpha})} \le \|T\|^{1-\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_0},L^{r_0})} \|T\|^{\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_1},L^{r_1})}.$$

Zur Beweis benötigen wir folgenden Satz und folgendes Lemma.

SATZ 1.16 (Hadamard, 3-Linien Satz). *Sei $a < b$ und $f : \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\} \to \mathbb{C}$ analytisch und beschränkt. Weiter sei*

$$M_a = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(a+it)|, \text{ und } M_b = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(b+it)|.$$

Dann gilt:

$$|f(x+iy)| \le M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}, \quad x + iy \in \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\}.$$

PROOF. Wir betrachten $f_\varepsilon(x+iy) = \mathrm{e}^{\varepsilon(x+iy)^2} f(x+iy) M_a^{\frac{x+iy-b}{b-a}} M_b^{\frac{a-(x+iy)}{b-a}}$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt $|f_\varepsilon(a+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon a^2}$ und $|f_\varepsilon(b+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}$ (Beachte: $|a^{iy}| = 1$ für $a > 0$, $y \in \mathbb{R}$). Außerdem gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} \sup_{a\le x\le b} |f_\varepsilon(x+iy)| = 0.$$

Mit dem Maximumprinzip für analytische Funktionen und ein hinreichend großes Rechteck folgt $|f_\varepsilon(z)| \le \max\{\mathrm{e}^{\varepsilon a^2}, \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}\}$. Aus $\varepsilon \to 0^+$ folgt die Behauptung. □

LEMMA 1.17. *Sei* $p_0 < p < p_1$ *und* $f = \sum \alpha_j a_j \chi_{E_j}$ *eine Treppenfunktion mit* $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $|\alpha_j| = 1$, $a_j > 0$ *und* $\{E_j\}$ *paarweise, disjunkte, mb. Mengen mit (jeweils) endlichem Maß. Weiter sei* $\|f\|_p = 1$ *und*

$$f_z = \sum \alpha_j a_j^{\frac{p}{p_z}} \chi_{E_j},$$

wobei p_z

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

genügt. Dann gilt:

$$\|f_z\|_{L^{p_{\mathrm{Re}\,z}}} = 1, \quad 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1.$$

PROOF. Es gilt

$$\int |f_z(x)|^{p_{\mathrm{Re}\,z}} d\mu \overset{\text{Ü.A.}}{=} \sum |a_j|^p \mu(E_j).$$

□

BEWEIS V. THEOREM 1.15. Sei $p = p_\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ und betrachte Treppenfunktion f und f' auf M, welche $\|f\|_p = \|f'\|_{p'} = 1$ erfüllen. Sei f_z und f'_z wie in Satz 1.16, wobei f_z mit p_0 und p_1 und f'_z mit r_0 und r_1 konstruiert werden. Nach Voraussetzung ist

$$\Phi(z) := \int_M f'_z(x) T f_z(x) d\mu(x)$$

analytisch in z. Mit Lemma 1.17 folgt nun:

$$|\Phi(j+iy)| \le \|f'_z\|_{p'} M_j \|f_z\|_p \le M_j, \quad j = 0,1, \ y \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\Phi(j+iy)| \le M_j, \quad j = 0,1.$$

Damit folgt mit dem 3-Linien Satz, dass

$$|\int f' T f| \le M_0^{1-\alpha} M_1^{\alpha}.$$

Da Treppenfunktionen dicht in $L^{p'}$ sind, erhalten wir $\|Tf\|_p \le M_0^{1-\alpha} M_1^{\alpha}$. Die Behauptung folgt nun, da Treppenfunktionen auch in L^p dicht sind. □

2. L_p Räume II

Im Folgenden sei μ stets das Lebesgue-Maß und Σ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

SATZ 2.1 (Faltung, Youngsche Ungleichung). *Sei* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$. *Dann gilt*

(a) *Für fast alle* $x \in \mathbb{R}^d$ *ist* $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

(b) Setzt man

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

so ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_p \qquad 1 \le p \le \infty.$$

Proof. Sei $p = 1$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \|f\|_1\|g\|_1.$$

Für $p = \infty$ liefert die Hölder-Ungleichung

$$|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y| \le \|f\|_1\|g\|_\infty,$$

insbesondere existiert $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Betrachte nun die Abbildung $T_f g := f * g$. Dann folgt aus dem Riesz–Thorin Konvexitätstheorem, dass $T_f \in \mathscr{L}(L^p, L^p)$ und $\|T_f\|_{\mathscr{L}(L^p,L^p)} \le \|f\|_1$ für $1 \le p \le \infty$, d.h. (b) gilt. Ferner erhalten wir mit Beppo-Levi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||\chi_{B(0,r)}g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \\
&\le \lim_{r\to\infty} \|f\|_1\|\chi_{B(0,r)}g\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \right)^p < \infty, \ \text{f.a. } x \in \mathbb{R}^d.$$

$\square$

Beispiel 2.2.

(a) Betrachte

$$(1-\Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $f \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(x) = (k * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einem Kern *$k \in L^1$.*

(b) Betrachte

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $u_0 \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(t,x) = (k_t * u_0)(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

mit $k_t \in L^1$ für $t>0$.

KOROLLAR 2.3. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann definiert die Abbildung $Tf := f*g$ einen stetigen linearen Operator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\|T\| \le \|f\|_1$.*

SATZ 2.4. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann $f*g \in C(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Wegen $|(f*g)(x)| \le \|f\|_1\|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x\in\mathbb{R}^d$. Sei $x_n \to x$. Setze $F_n(y) = f(x_n-y)g(y)$ und $F(y) = f(x-y)g(y)$, dann $F_n(y) \to F(y)$ für fast alle $y\in\mathbb{R}^d$. Anderseits, sei K kompakt so, dass $x_n - \operatorname{supp} f \subseteq K$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann $x_n - y \notin \operatorname{supp} f$ falls $y \notin K$, d.h. $f(x_n-y) = 0$ für $y\notin K$, und so $|F_n(y)| \le \|f\|_\infty \chi_K(y)|g(y)|$ integrierbare Majorante. Nach Lebesgueschen Satz folgt $\int F_n\,\mathrm{d}y \to \int F\,\mathrm{d}y$. □

DEFINITION 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ messbar und setze*

$$O_f := \Big\{x\in\Omega : \exists V\subset\Omega \text{ offene Umgebung von } x \text{ mit } f(x)=0 \text{ für f.a. } x\in V\Big\}$$

Dann heißt $\operatorname{supp} f := \Omega\setminus O_f$ *der* Träger *von f.*

SATZ 2.6. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \tag{5}$$

PROOF. Wegen $|(f*g)(x)| \le \|f\|_1\|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x\in\mathbb{R}^d$. Also

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{(x-\operatorname{supp} f)\cap\operatorname{supp} g} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Falls $x\notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, gilt $(x-\operatorname{supp} f)\cap\operatorname{supp} g = \emptyset$ und $(f*g)(x) = 0$. □

BEMERKUNG 2.7. *Im Satz 2.6 gilt* $\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

BEMERKUNG 2.8. *Die obige Aussage* (5) *gilt auch für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1\le p\le\infty$.*

SATZ 2.9. *Seien $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $f*g \in C^k(\mathbb{R}^d)$, und $D^\alpha(f*g) = D^\alpha f * g$. Insbesondere $f\in C^\infty_c$, $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Wie immer $(f*g)(x)$ existiert für alle x. Sei $e_j \in \mathbb{R}^d$ ein Standardbasisvektor, $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq 1$. Setze $K := \operatorname{supp} f + \overline{B}(0,1)$, dies ist auch kompakt. Dann

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{h}((f*g)(x+he_j) - (f*g)(x)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{K-x} \tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

wobei der Integrand gegen $D_j f(x-y)g(y)$ für alle y konvergiert. Außerdem gilt

$$\left|\tfrac{1}{h}(f(x+he_j-y)g(y) - f(x-y))g(y)\right| \leq \|D_j f\|_\infty |g(y)|.$$

Nach dem Satz von Lebesgue bekommen wir $D_j(f*g)(x) = ((D_j f)*g)(x)$, und so die Behauptung. □

DEFINITION 2.10. *Eine Folge* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *von Funktionen mit den Eigenschaften*

(a) $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$
(b) $\rho_n \geq 0$
(c) $\operatorname{supp} \rho_n \subseteq B(0,1/n)$
(d) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = 1$

heißt Mollifier.

BEISPIEL 2.11. *Betrachte* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq B(0,1)$, $\rho \geq 0$, $\int \rho = 1$, *und definiere* $\rho_n(x) := 1/n^d \rho(nx)$.

LEMMA 2.12. *Sei* $f \in C(\mathbb{R}^d)$ *und* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *ein Mollifier. Dann konvergiert* $\rho_n * f \to f$ *gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von* $\mathbb{R}^d$.

PROOF. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon$ für $x \in K$ und $|y| \leq \delta$. Also

$$\begin{aligned}
(\rho_n * f)(x) - f(x)i &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{B(0,1/n)} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

so für $n > 1/\delta$ gilt $|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon$ für $x \in K$. □

LEMMA 2.13 (Urysohn, C^∞-Version). *Sei* $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen,* $K \subseteq \Omega$, K *kompakt. Dann existiert ein* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ *mit* $0 \leq \varphi \leq 1$ *und* $\varphi(x) = 1$ *für* $x \in K$.

PROOF. Sei $0 < 1/n < \varepsilon < \varepsilon + 1/n < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$. Setze $U_\varepsilon := \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y,K) < \varepsilon\} \subseteq \Omega$ und $u = \chi_{U_\varepsilon}$. Dann gilt $\varphi := \rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B}(0,1/n) + \overline{U}_\varepsilon \subseteq \Omega$, also $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega$ ist kompakt. Sei $x \in K$, dann $\varphi(x) = \int_{|y|\leq 1/n} u(x-y)\rho_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|y|\leq 1/n} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y = 1$. Ferner $\|\varphi\|_\infty \leq \|\rho_n\|_1 \cdot \|u\|_\infty = 1$. Da $\varphi \geq 0$ folgt auch $0 \leq \varphi \leq 1$. □

BEMERKUNG 2.14. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann existiert $V \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $\overline{V}$ kompakt und*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega.$$

PROOF. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ wie in Lemma 2.13 und setze

$$V := \{x \in \Omega; \varphi(x) > \frac{1}{2}\}.$$

□

SATZ 2.15. *Sei $1 \le p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
Beh.:$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktion $T = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $A_i \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und $\|T - f\|_p \le \varepsilon$.
Maßtheorie.
Beh.:$\forall \varepsilon > 0 \exists u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$:$\|u - \chi_{A_i}\|_p \le \varepsilon$.
Wähle eine offene Menge O und eine kompakte Menge K mit $K \subset A_i \subset O$ und $|O \setminus K| \le \varepsilon$ (Existenz: Maßtheorie). Dann existiert nach Lemma 2.13 ein $\varphi \in C_c^\infty(O)$ mit $\varphi \equiv 1$ auf K. Es gilt:

$$\int_O |\chi_{A_i} - \varphi|^p = \int_{O\setminus K} |\chi_{A_i} - \varphi|^p \le 2^p |O \setminus K| \le 2^p \varepsilon.$$

□

SATZ 2.16. *Sei $(\rho_n)_{n\ge1}$ ein Mollifier.*
(a) Sei $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_p \to 0$.
(b) Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$. Dann $\|\rho_n * f - f\|_\infty \to 0$

PROOF. (a) Nach Satz 2.15 existiert für $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f - g\| \le \varepsilon$. Satz 2.6 liefert

$$\operatorname{supp}(\rho_n * g) \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + \operatorname{supp} g \subseteq K, \qquad \text{wobei } K \text{ compact.}$$

Da nach Lemma 2.12 $\rho_n * g$ gleichmässig auf K gegen g konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\rho_n * g - g\|_p^p = \int_K |\rho_n * g - g|^p \le \varepsilon^p |K|.$$

Daraus folgt mit der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\rho_n * f - f\|_p &\le \|\rho_n * (f - g)\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\le \|f - g\|_p + \|\rho_n * g - g\|_p + \|g - f\|_p \le \varepsilon + \varepsilon |K|^{\frac{1}{p}} + \varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Wiederhole den Beweis von Lemma 2.12. □

KOROLLAR 2.17. *Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $1 \le p < \infty$. Dann ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$.*

PROOF. Setze $\Omega_n := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}\}$ und

$$f_n(x) = \begin{matrix} f(x) & , & x \in \Omega_n \\ 0 & , & \text{sonst} \end{matrix}$$

Dann gilt nach dem Satz von Lebesgue $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$, d.h für $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 mit $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.
Setze $g_m := \rho_m * f_n$, wobei ρ_m ein Mollifer ist. Dann existiert nach Satz 2.16 ein $m_0 > n_0$ mit $\|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^d} \leq \varepsilon$, $m \geq m_0$. Desweiteren gilt

$$\mathrm{supp}\, g_m = \mathrm{supp}\, \rho_m + \mathrm{supp}\, f_{n_0} \subset \Omega, \quad m \geq m_0.$$

Damit erhalten wir

$$\|g_m - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|g_m - f_{n_0}\|_{L^p(\Omega)} + \|f_{n_0} - f\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon, \quad m \geq m_0.$$

□

SATZ 2.18 (Zerlegung der Eins). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Seien ferner*

$$K_i \subset \Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset \Omega, \qquad i \in \mathbb{N},$$

mit K_i, $\overline{\Omega}_i$ kompakt und

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i = \Omega,$$

so, dass für alle $x \in \Omega$ existiert eine Umgebung $U(x)$, die nur endlich viele Ω_j trifft (diese Überdeckung heißt lokal endlich*). Nehmen wir ferner an, dass $K_j \cap K_i = \emptyset$, falls $i \neq j$.*
Dann existieren $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega)$, $i \in \mathbb{N}$ mit
(a) $\varphi_i \geq 0$
(b) $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in \Omega$
(c) $0 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i \leq 1$.
Außerdem gilt $\varphi_j(x) = 1$ für $x \in K_j$.

PROOF. 1. Schritt: Nehmen wir an dass wir die folgende Situation haben

$$K_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V}_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$$

wobei $\overline{V}_j$ kompakt, $U_i \cap K_j = \emptyset$ falls $i \neq j$ und V_j, U_j sind lokal endliche Überdeckungen von Ω. Wähle φ'_j nach Lemma 2.13 zu U_j und $\overline{V}_j$. Dann gilt $\varphi(x) := \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi'_i(x) > 0$, wobei lokal in Ω nur endlich viele Summanden von 0 verschieden sind. Setze Setze $\varphi_j(x) := \varphi'_j(x)/\varphi(x)$. Nach Konstruktion haben die φ_i die gewünschte Eigenschaften.

2. Schritt, Disjunktisierung von Ω_j und K_j: $U_j := \Omega_j \setminus \bigcup_{i\neq j} K_j$. Natürlich gilt $K_j \subseteq U_j \subseteq \Omega_j$. Wir behaupten, dass U_j offen ist. Sei $x \in U_j$ und $U(x) \subseteq \Omega_j$ eine Umgebung von x so, dass $J := \{i : \Omega_i \cap U(x) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Für $j \neq k \in J$ existiert eine Umgebung $W_k(x) \subseteq U(x)$ von x mit $W_k(x) \cap K_k = \emptyset$. Setze $W(x) := \cap_{k\in J} W_k(x)$, die ist eine Umgebung von x mit $W(x) \subseteq U_j$ und $W(x) \cap K_i = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, also U_j ist offen. Sei jetzt $x \in \Omega$, liegt dann $x \in \Omega_j$ für ein j, dann entweder liegt es in U_j

oder in K_i für ein $i \neq j$. Die Überdeckung U_j is lokal endlich da Ω_j lokal endlich ist.

3. Schritt, Konstruktion von V_j: Sei $V_1 := U_1$. Angenommen V_j, $j < n$ konstruiert ist mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j = \Omega,$$

sei F_n eine abgeschlossene Umgebung von ∂U_n die erfüllt

$$\partial U_n \subseteq F_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Solche eine Umgebung existiert nach Bemerkung 2.14. Falls $U_n \neq 0$, können wir eine kleinere Umgebung $\partial U_n \subseteq F'_n \subseteq F_n$ finden damit $U_n \setminus F'_n$ nichtleer wird. Setze $V_n := U_n \setminus F'_n$. Dann

$$U_n \subseteq V_n \cup F'_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_j \cup \bigcup_{j=n+1}^{\infty} U_j.$$

Also V_j ist eine offene Überdeckung, die natürlich lokal endlich bleibt. $\square$

SATZ 2.19 (Zerlegung der Eins). *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, mit $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann existiert $\varphi_i \in C_c^\infty(\Omega_j)$ mit*

- *(a)* $\varphi_i \geq 0$
- *(b)* $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1$, *falls* $x \in K$
- *(c)* $0 \leq \sum_{i=1}^n \varphi_i \leq 1$.

PROOF. Wähle V mit $\overline{V}$ kompakt und

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$$

nach Bemerkung 2.14. Setze $U_i; = V \cap \Omega_i$ und verwende Satz 2.18 $\square$

BEMERKUNG 2.20. *Das System $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ heißt* der Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins *zu K.*

3. Sobolev Räume I.

In diesem Abschnitt es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

DEFINITION 3.1 (Distributionelle Ableitung). *Sei $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Falls die Identität*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

gilt, heißt g die distributionelle Ableitung *von f, und wir schreiben $D^\alpha f = g$, $f^{(\alpha)} = g$ oder $f = \partial^\alpha g$.*

BEMERKUNG 3.2.

(a) *Die distributionelle Ableitung ist eindeutig, insbesondere ist die obige Definition sinnvoll, denn*

$$\int_\Omega (f-g)\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad f-g=0 \text{ fast überall.}$$

(b) *Falls $f \in C^m(\Omega)$. Dann für jede $|\alpha| \leq m$ ist $D^\alpha f$ die klassische partielle Ableitung von f.*

Definition 3.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Definiere*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq m \ \exists D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$$
$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Satz 3.4. *$W^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

Proof. Klar: normierter Vektorraum. Um die Vollständigkeit zu zeigen, nehme $(f_n) \in W^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge, d.h. die Folgen $(D^\alpha f_n) \subseteq L^p(\Omega)$ sind alle Cauchyfolgen. Daher konvergieren die auch, bezeichne die Grenzwerten mit f_α. Wir zeigen nun $D^\alpha f = f_\alpha$:

$$\int_\Omega f_\alpha \varphi \leftarrow \int_\Omega D^\alpha f_n \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_n D^\alpha \varphi \to (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi.$$

Die Behauptung folgt. □

Satz 3.5. *Sei $1 < p < \infty$. Dann ist $W^{m,p}(\Omega)$ separabel und reflexiv. $W^{m,1}(\Omega)$ ist separabel.*

Proof. Definiere die stetige Abbildung

$$J : W^{m,p}(\Omega) \to \underbrace{L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)}_{M} =: X,$$

wobei $M =$ die Anzahl der Multiindizes α mit $|\alpha| \leq m$ ist, durch $(Jf)(x) := (D^\alpha f)_{|\alpha|\leq m}$. Dann ist J stetig invertierbar, bildet also auf einen angeschlossenen Unterraum von X ab. Falls $1 \leq p < \infty$ ist, ist X separabel, ist zusätzlich $p > 1$, folgt die Reflexivität von X. □

Lemma 3.6 (Lokale Approximation). *Sei $1 \leq p < \infty$, $f \in W^{m,p}(\Omega)$ und $D \subseteq \Omega$ offen mit $\overline{D} \subseteq \Omega$. Betrachte $\delta = \operatorname{dist}(D, \partial\Omega) > 0$ und den Mollifier η_ε, $\varepsilon < \delta$. Setze $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)$. Dann $f_\varepsilon \to f$ in $W^{m,p}(D)$.*

Proof.

$$\begin{aligned} D^\alpha f_\varepsilon(x) = D^\alpha \eta_\varepsilon * (\chi_\Omega f)(x) &= \int_\Omega D^\alpha(\varphi_\varepsilon(x-y)) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{Träger!}}{=} \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y) D^\alpha f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (D^\alpha f)_\varepsilon(x), \quad x \in D. \end{aligned}$$

Also $f_\varepsilon \in W^{m,p}(D)$ und nach Satz 2.16 $D^\alpha f_\varepsilon = (D^\alpha f)_\varepsilon \to D^\alpha f$. □

SATZ 3.7. *Für $1 \leq p < \infty$ ist $W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.*

PROOF. Betrachte eine lokal finite Überdeckung Ω_k von Ω, $\overline{\Omega_k} \subseteq \Omega$ kompakt (siehe Satz 2.18). Sei φ_k Zerlegung der Eins, $\varepsilon > 0$ und $c_k > 0$ später noch zu bestimmen. Für $\varepsilon > 0$ existiert nach Lemma 3.6 $f_{k,\varepsilon} \in W^{m,p}(\Omega_k)$ mit $\|f - f_{k,\varepsilon}\| \leq c_k \varepsilon$. Setze

$$f_\varepsilon := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k f_k, \text{ also } f_\varepsilon - f := \sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi_k (f_{k,\varepsilon} - f)$$

(lokal nür endlich viele Summanden). Die Produktregel gilt, denn für $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \varphi_k f D_i \psi = \int_\Omega (D_i(\varphi_k \psi) - D_i \varphi_k \psi) f = -\int_\Omega (\varphi_k \psi D_i f + \psi f D_i \varphi_k).$$

Daher ist $\varphi_k f \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$D_i(\varphi_k f) = D_i \varphi_k \cdot f + \varphi_k D_i f.$$

Ferner gilt induktiv auch $\varphi_k f \in W^{m,p}(\Omega)$, und für $|\alpha| \leq m$

$$D^\alpha(\varphi_k f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \varphi_k \cdot D^\beta f.$$

Wir erhalten

$$D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k\in\mathbb{N}} D^{\alpha-\beta} \varphi_k (D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f).$$

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f_\varepsilon - D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} &\leq C \sum_{k\in\mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} \|D^\beta f_{k,\varepsilon} - D^\beta f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C\varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k |\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

falls $c_k \leq 2^{-k}(\|\varphi_k\|_{C^m(\overline{\Omega})} + 1)^{-1}/C$. □

SATZ 3.8 (Produktregel). *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in W^{m,p}(\Omega)$, $g \in W^{m,q}(\Omega)$. Dann $fg \in W^{m,1}(\Omega)$ und $D_i(fg) = D_i f \cdot g + f D_i g$.*

PROOF. Sei $p < \infty$. Nehme $f_k \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit $f_k \to f$. Wir haben gesehen $D_i(f_k g) = D_i f_k \cdot g + f_k D_i g$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega D_i \varphi \cdot fg &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega D_i \varphi \cdot f_k g = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi D_i(f_k g) \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi(D_i f_k \cdot g + f_k D_i g) = -\int_\Omega \varphi(D_i f \cdot g + f D_i g). \end{aligned}$$

Der Rest folgt mit Induktion. □

Satz 3.9 (Kettenregel). *Seien $\Omega', \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und $\Phi : \Omega' \to \Omega$ ein C^1-Diffeomorphismus mit beschränkten Ableitungen $D\Phi$, $D\Phi^{-1}$. Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt für $f \in W^{1,p}(\Omega)$:*

(a) $f \circ \Phi \in W^{1,p}(\Omega')$.
(b) $\partial(f \circ \Phi) = \partial f \circ \Phi \cdot \partial\Phi$.

Proof. ÜA. ☐

Lemma 3.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

(a) $D_j f^+ = 1_{f>0} D_j f$, $D_j f^- = -1_{f<0} D_j f$ *fuer* $f \in H^1(\Omega)$
(b) $f \mapsto |f|$, f^+, f_- : $H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ *stetig.*
(c) $D(\Omega)_+$ *dicht in* $H_0^1(\Omega)_+$.
(d) *Sei* $u \in H^1(\Omega)$, *supp*$(u) \subset\subset \Omega$, *d.h. es existiert ein offenes* $D \subset \Omega$ *mit* $\operatorname{supp} u \subset D \subset \overline{D} \subset \Omega$. *Dann ist* $u \in H_0^1(\Omega)$.

Proof. Ü.A. ☐

Satz 3.11. *Sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Interval und $f \in W^{1,1}(I)$. Dann existiert eine Nullmenge N so, dass für $x, y \in I \setminus N$*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z \tag{6}$$

gilt.

Proof. Sei $f_k \in C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$. Dann gilt

$$f_k(y) - f_k(x) = \int_x^y f_k'(z)\,\mathrm{d}z \to \int_x^y f'(z)\,\mathrm{d}z.$$

Da f_k in $L^1(I)$ konvergiert, besitzt sie eine punktweis fast überall konvergente Teilfolge, also $\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(z) = f(z)$ für fast alle $z \in I$. ☐

Satz 3.12. *Sei $I \neq \emptyset$ ein offenes Interval und $f, g \in L^1(I)$ mit*

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(z)\,\mathrm{d}z \quad \textit{für } x, y \in I \setminus N,$$

für eine Nullmenge N. Dann ist $f \in W^{1,1}(I)$ und $f' = g$.

Proof. Sei $\psi \in C_c^\infty(I)$, und $c, d \in I$ so, dass $\operatorname{supp}\psi \in [c, d]$ und $f(y) - f(c) = \int_c^y g(z)\,\mathrm{d}z$ für fast alle $y \in I$. Dann

$$\int_c^d \psi'(y)(f(y) - f(c))\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_c^y \psi'(y) g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_x^d \psi'(y)\,\mathrm{d}y g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_c^d \psi(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

SATZ 3.13. *Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Dann existiert ein $g \in C(\overline{I})$ so, dass $f = g$ fast überall.*

PROOF. Sei $I = (a, b)$. Definiere $h(y) := \int_a^y f'(z)\,\mathrm{d}z$. Die Funktion h ist stetig auf I, denn $f' \in L^1(I)$. Außerdem existiert $\lim_{x \to a,b} h(x)$, also $h \in C(\overline{I})$. Seien x, z so, dass $f(z) - f(x) = \int_x^z f'(z)\,\mathrm{d}z$. Sei $c := f(z) - h(z)$ und setze $g(y) := h(y) + c$. Nach Definition $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in I$. □

BEMERKUNG 3.14. *Die obige Integralgleichung impliziert nicht nur Stetigkeit sondern auch* Absolutstetigkeit. *Genauer ist Absolutstetigkeit äequivalent zu* (6) *(vgl. Maßtheorie).*

SATZ 3.15. *Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $I = (a, b)$. Dann sind die Einbettungen $W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ stetig. Falls $p > 1$, ist die Einbettung $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ kompakt.*

PROOF. Es ist klar, dass die Einbettungen

$$W^{m,p}(I) \hookrightarrow W^{1,p}(I) \hookrightarrow W^{1,1}(I)$$

stetig sind.
Es bleibt zu Zeigen, dass $W^{1,1(I)} \hookrightarrow C(\overline{I})$ stetig ist. Sei $f \in W^{1,1}(I)$. Nach Satz 3.11 existiert eine Nullmenge N mit

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x, y \in I \setminus N.$$

Dann gilt

$$|f(y)| = \left| f(x) + \int_x^y f' \right| \leq |f(x)| + \int_x^y |f'| \leq |f(x)| + \|f'\|_{L^1(I)}.$$

Integration bzgl. x über I liefert

$$(b - a)|f(y)| \leq \int_I |f(y)|\,\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^1(I)} + (b - a)\|f'\|_{L^1(I)}, \quad y \in I \setminus N,$$

d.h. $\|f\|_{L^\infty(I)} \leq C\|f\|_{W^{1,1}(I)}$. Da $C^\infty(I) \cap W^{1,1}(I)$ dicht in $W^{1,1}(I)$ ist, folgt die Behauptung (Beachte: für $f \in C(\overline{I})$ gilt $\|u\|_{L^\infty(I)} = \|u\|_\infty$..
Nun sei $p > 1$. Dann gilt

$$|f(y) - f(x)|^p \leq \Big(\int_x^y |f'| \Big)^p \overset{\text{Hölder}}{\leq} (x - y)^{p/q} \int_x^y |f'|^p \leq (x - y)^{p/q} \int_a^b |f'|^p,$$

d.h.

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{W^{1,1}(I)}, \quad f \in W^{1,1}(I).$$

Also ist $B_{W^{1,p}(I),1}(0) \subset C(I)$ gleichmäßig gleichgradig stetig. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Arzelà–Ascoli. □

4. Sobolev Räume II. – Einbettungssätze

SATZ 4.1. *Für $1 \leq p < \infty$ ist der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Seien $\varepsilon > 0$, $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq B(0,2)$ und $\psi(x) = 1$ für $x \in \overline{B(0,1)}$. Setze $\psi_j(x) := \psi(x/j)$.
Beh. $\psi_j f \to f$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.
Die Produktregel (Satz 3.8) liefert

$$|D^\alpha(\psi_j f - f)| \leq C \sum^{\beta \leq \alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)| \cdot |D_{\alpha-\beta} f|,$$

also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha(\psi_j f - f)|^p i &\leq C' \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\beta \leq \alpha} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&= C' \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&+ C' \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&= C' \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,j)} |D^\beta(\psi_j - 1)|^p \cdot |D^{\alpha-\beta} f|^p \\
&\leq C'' \sum_{\beta \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,j)} |D^{\alpha-\beta} f|^p \leq \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

falls j groß genug ist.
Nun betrachten wir einen Mollifier (ρ_n). Dann hat $\rho_n * \psi_j f$ kompakten Träger und ist glatt. Nach Satz 2.9 und 2.16 gilt $D_\alpha(\rho_n * (\psi_j f)) = \rho_n * D_\alpha(\psi_j f) \to D_\alpha \psi_j f$ für $n \to \infty$. Sei also erst j groß und dann n genügend groß, so dass

$$\|f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \|f - \psi_j f\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \|\psi_j f - \rho_n * (\psi_j f)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

□

SATZ 4.2. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

mit stetiger Einbettung, d.h. für eine Konstante C_p

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_p \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

PROOF. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $1 \leq p < \infty$. Setze $G(s) := |s|^{p-1}s$. Dann gilt $\psi := G(\varphi) \in C_c^1(\mathbb{R})$ und $\psi' = G'(\varphi)\varphi' = p|\varphi|^{p-1}\varphi'$. Also erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$

$$G(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|\varphi(t)|^{p-1}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$