KAPITEL 1

Einführung in die Problematik

1. Physikalische Motivation

Betrachte einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung. Nun wollen wir untersuchen wie die Wärme geleitet wird.

Annahmen:

- Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall $[0,1]$, $u(t,x) =$ Temperatur in x zum Zeitpunkt t.
- Konstanten: ρ Dichte, c spezifische Wärme
- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Wärmequelle
- Energie in Segment $[x_1, x_2]$: $E(x_2, x_1, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(t, x_1)$
- Wärmeleitungsregel von Fourier: Sei $Q(t,x) =$ die Wärme durch Punkt x zum Zeitpunkt t

$$\frac{Q(t_2,x) - Q(t_1,x)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x) \qquad K_0 \text{ Thermale Konduktivität}$$

- Energieerhaltung:

$$c\rho(x_2 - x_1)(u(t_2,x_1) - u(t_1,x_1))$$
$$= (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1)\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(t_1,x_1) - \frac{\partial}{\partial x}u(t_1,x_2)\Big).$$

Daraus folgt

$$\frac{u(t_2,x_1) - u(t_1,x_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho}\frac{\frac{\partial}{\partial x}u(t_1,x_2) - \frac{\partial}{\partial x}u(t_1,x_1)}{x_2 - x_1}$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{f(x)}{c\rho} + \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \tag{1}$$

wobei $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$ die thermische Diffusivität (eine Konstante) ist.

Stationäre Temperaturverteilung (Gleichgewicht, steady state):

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) \overset{u(t,x)=v(x)}{\Longrightarrow} 0 = f(x) + \Delta v(x) \Longrightarrow \Delta v(x) = -f(x).$$

2. Mathematische Problemstellung

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

Gegeben: Stetige Funktion f auf $\overline{\Omega}$.

Gesucht: Stetige Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, in Ω zweimal differenzierbar mit

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) & = & f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) & = & 0(x) & \forall x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2}$$

Anwendung: Potential eines Ladungsfreies elektrisches Feldes.

u stationäre Temperaturverteilung

BEMERKUNG 2.1. *Δ ist ein linearer Operator $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$.*

Idee: Definiere den Laplace-Operator in geeigneten Räumen und untersuche Abbildungsvorschriften.
Sei z.B. $X := \{h : \ h \in C^2(\overline{\Omega}),\ h\big|_{\partial\Omega} = 0\}$ und $Y := C(\overline{\Omega})$ und betrachte $\Delta_{XY} : X \to Y$.
Typische Fragestellungen:

(a) Ist Δ_{XY} injektiv (d.h. die Lösung der Gleichung ist eindeutig, falls sie existiert)
(b) Ist Δ_{XY} surjektiv (d.h. es existiert eine Lösung der Gleichung für alle $f \in Y$).
(c) Finde möglichst einen großen Raum Y so dass Δ_{XY} surjektiv ist (d.h. die Gleichung ist für viele f lösbar).
(d) Da X typischerweise nicht explizit gegeben ist, finde möglichst viele Eigenschaften von X (d.h. Eigenschaften der Lösung).

BEMERKUNG 2.2. *(a) Der Laplace-Operator besitzt keine guten Eigenschaften in $C(\overline{\Omega})$. Suche nach geeigneten Räumen führt auf* Sobolev-Räume *(reflexive Banachräume bzw. Hilberträumen).*

Idee (L_2-Theorie):

(a) Die Existenz einer *schwachen* Lösung lässt sich im Hilbertraumfall (L_2-Theorie) sehr einfach über Lax-Milgram zeigen.
(b) Regularitätstheorie liefert dann eine *starke* bzw. *klassische* Lösung.

BEMERKUNG 2.3. *Eine wichtige Rolle bei der Regularitätstheorie spielt die sogenannte Lokalisierung.*

Idee (L_p-Theorie):

(a) Betrachten zunächst
$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$
(b) Benutze die sog. *Fouriertransformation*. Die zentrale Eigenschaft dieser Abbildung ist, dass sie Differentialausdrücke in algebraische umwandelt. Im Fall $(\lambda - \Delta)$ erhält man
$$(\lambda + |\xi|^2)\mathcal{F}u = \mathcal{F}f.$$
Damit ist die formale Inverse von $(\lambda - \Delta)$ durch $u = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}f$ gegeben.

Typische Fragestellungen:

(a) Wie kann man dem formalen Ausdruck $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ als Operator: $Y \to X$ einen Sinn zu geben?
(b) Finde hinreichende Bedinungen, so dass $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ ein beschränkter Operator in L_p ist.

BEMERKUNG 2.4. *Auf diesem Weg werden wir auch erkennen, dass sich* $T = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$ *auch als Integraloperator, d.h.* $Tf(x) = \int k(x,y)f(y)dy$, *darstellen lässt.*

Im letzten Abschnitt betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung (1).
Idee:

(a) Betrachte u als Funktion $t \to u(t,\cdot) \in X$, X ein Funktionenraum (Sobolevraum)
(b) Sei Δ der Laplaceoperator und betrachte

$$u'(t) - \Delta u(t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(0) = u_0.$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL im Banachraum!
(c) Ana III: Lösung ist $\mathrm{e}^{\Delta t}u_0$.

Typische Fragestellungen

(a) Vernüftige Definition für e^{tA} für große Klassen von (Differential-)operatoren.
(b) Suche Bedingungen an A, so dass e^{tA} wohldefiniert ist

BEMERKUNG 2.5. *Für spezielle (in Physik und Ingenieurwissenschaften sehr relevante) Klassen von Differentialoperatoren, sog.* Divergenzoperatoren*, lässt sich zeigen, dass* e^{tA} *wieder ein Integraloperator ist (z.B. Laplace auf* beliebigen *offenen Mengen).*

KAPITEL 2

Sobolevräume

1. L_p Räume (Erinnerung)

In diesem Abschnitt sei (M, Σ, μ) stets ein Maßraum.

DEFINITION 1.1.

(a) *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Setze* $\|f\|_p := \Big(\int\limits_M |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}$.

(b) *Sei* $f : M \to \mathbb{K}$ *messbar. Dann heißt* f wesentlich beschränkt, *falls ein* $\alpha > 0$ *existiert mit* $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. *Ferner heißt*

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : \ \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\} = 0)\}$$

das wesentliche Supremum von f.

(c) *Sei* $1 \leq p \leq \infty$. *Definiere*

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K}) := \big\{f : f : M \to \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\big\}.$$

BEMERKUNG 1.2.

(a) $\|\cdot\|_p$ *ist eine Halbnorm auf* $\mathcal{L}^p$.

(b) *Sei* $f \in \mathcal{L}^p$. *Dann ist* $\|f\|_p = 0$ *genau dann wenn*

$$f \in \mathcal{N} := \{f : \ \ f \text{ messbar und } f = 0 \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

(c) $\mathcal{L}^p$ *ist ein Vektorraum.*

(d) $\mathcal{N}$ *ist ein Unterraum von* $\mathcal{M}$, *dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von* $\mathcal{L}^p$*), und*

$$f \sim g \quad \overset{Def.}{\iff} \quad f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation

DEFINITION 1.3. *Der Raum* L^∞ *ist definiert durch:*

$$L^\infty(M, \mu) := \mathcal{L}(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty, \qquad \forall [f] \in L^\infty.$$

SATZ 1.4.

(a) $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ*-fast überall.*

(b) $\|\cdot\|_\infty$ *ist ein Norm.*

(c) $\|f_n - f\|_\infty \to 0 \implies$ *es existiert ein* $A \in \Sigma$ *mit* $\mu(A^c) = 0$ *und* $f_n \to f$ *gleichmässig auf* A.

(d) $(L^\infty(M, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

DEFINITION 1.5. *Sei* $1 \leq p < \infty$

$$L^p(M,\mu) := (M,\Sigma,\mu,\mathbb{K})/\mathcal{N}, \qquad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \qquad \forall [f] \in L^p.$$

SATZ 1.6 (Höldersche Ungleichung). *Es sei* $1 \leq p,q \leq \infty$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *(interpretiere* $1/\infty = 0$*). Desweiteren seien* $f \in L^p(M,\mu)$ *und* $g \in L^q(M,\mu)$*. Dann ist* $f \cdot g \in L^1(M,\mu)$ *und*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

PROOF. Die Fälle $p = 1, \infty$ sind trivial. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $f, g \neq 0$. Dann gilt

$$ab \leq \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q} \qquad \text{(Youngsche Ungleichung)}.$$

(Der Beweis dieser Ungleichung ist elementar.) Natürlich ist fg messbar. Seien $G := g/\|g\|_q$ und $F := f/\|f\|_p$. Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt $x \in M$ ergibt nach Integration

$$\int_M |F(x)G(x)| \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_M \frac{|F(x)|^p}{p} \,\mathrm{d}\mu(x) + \int_M \frac{|G(x)|^q}{q} \,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt. □

SATZ 1.7 (Minkowskische Ungleichung). *Sei* $1 \leq p < \infty$ *und* $f, g \in L^p(M,\mu)$*. Dann gilt*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

SATZ 1.8 (Riesz–Fischer). *Sei* $1 \leq p < \infty$*. Dann ist* $L^p(M,\mu)$ *vollständig.*

SATZ 1.9. *Nehmen wir an, dass* $f_n \in L^p(M,\mu)$ *gegen* $f \in L^p(M,\mu)$ *konvergiert, dann existiert eine Teilfolge* f_{n_k}*, so dass* $f_{n_k}(x)$ μ*-fast überall konvergiert.*

SATZ 1.10 (Dualität). *Sei* $1 \leq p < \infty$*, und* (M,Σ,μ) σ*-endlicher Maßraum. Sei* $1/p + 1/q = 1$ *(so genannte* konjugierte Exponente*). Dann definiert* $L^q(M,\mu) \to L^p(M,\mu)'$

$$J(g)f := \int_M f \cdot g \,\mathrm{d}\mu, \qquad g \in L^q(M,\mu),\ f \in L^p(M,\mu).,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

PROOF. J ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist J linear. J ist isometrisch, denn sei $g \in L^q(M,\mu)$ und setze

$$f := \frac{\overline{g}}{|g|}\Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^{q/p}.$$

Dann

$$\|f\|_p = \int_M \left(\frac{|\overline{g}|}{|g\|}\right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \,\mathrm{d}\mu = 1$$

und $\int_M fg \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q$. Es bleibt die Surjektivität von J zu zeigen.

1. Fall $\mu(M) < \infty$: Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Betrachte $\nu : \Sigma \to \mathbb{K}$, $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$ ($\chi_A \in L^p(M,\mu)$). ν ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist ν absolut stetig bezüglich μ, denn $A \in \Sigma$ und $\mu(A) = 0$ impliziert $\chi_A = 0$ μ-fast überall, d.h. $\chi_A = 0$ in $L^p(M,\mu)$, also $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$. Satz von Radony–Nikodým ergibt $g \in L^1(M,\mu)$ mit

$$\nu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu = \int_M \chi_A g \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Also wegen Linearität

$$\varphi(f) = \int_M fg \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \text{ Treppenfunktionen } f. \tag{3}$$

Ferner $|\varphi(f)| \le C'\|f\|_\infty$. Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^\infty(M,\mu)$ also gilt (3) für $f \in L^\infty(M,\mu)$. Wir zeigen nun $g \in L^q(M,\mu)$. Sei erst $q < \infty$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

f ist messbar und $|g|^q = fg = |f|^p$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x \in M : |f(x)| \le n\}$. Dann ist $\chi_{A_n} f \in L^\infty(M,\mu)$ und

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_M \chi_{A_n} fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \le \|\varphi\| \|\chi_{A_n} f\|_p = \\ = \|\varphi\| \Big(\int_{A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} = \|\varphi\| \Big(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \\ \Longrightarrow \quad \int_{A_n} |g|^q \le \|\varphi\|^q \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz von Beppo Levi(monotone Konvergenz) gibt $g \in L^q(M,\mu)$.
Jetzt betrachten wir der Fall $q = \infty$. Dann $|g| \le \|\varphi\|$, denn sei $A := \{x \in X : |g(x)| > \|\varphi\|\}$. Setze $f := \chi_A |g|/g$, $f \in L^\infty(M,\mu)$. Nehmen wir $\mu(A) > 0$ an.

$$\mu(A)\|\varphi\| < \int_A |g| \,\mathrm{d}\mu = \int_M fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi(f) \le \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme $\Longrightarrow \mu(A) < \|f\|_1$, Widerspruch mit $\mu(A) = \|f\|_1$. Also $g \in L^\infty(M,\mu)$.

Die Treppenfunktionen sind dicht in $L^p(M,\mu)$ also $\varphi = Jg$.

2. Fall, $\mu(M) = \infty$: Es sei $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$ mit $\mu(M_n) < \infty$, und M_n paarweise disjunkt. Sei $\varphi \in L^p(M,\mu)'$. Setze $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$, für $f \in L^p(M_n,\mu_n)$, wobei $\mu_n(A) := \mu(M_n \cap A)$. Dann $\|\varphi_n\| \le \|\varphi\|$, insbesondere $\varphi_n \in L^p(M_n,\mu_n)'$. Verwende jetzt den ersten Fall um $g_n \in L^q(M_n,\mu_n)$ zu bekommen. Setze $g := \sum_{n=1}^\infty g_n$ (in jedem Punkt nur ein Summand, g_n wird

durch 0 fortgesetzt auf M_n^c). Es ist $g \in L^q(M,\mu)$ und $\varphi = Jg$ zu zeigen. Sei $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$ und f wie in (4)

$$\begin{aligned}\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^n \int\limits_{M_j} fg \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \int\limits_{M_j} \chi_{M_j} f g_j \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f) \\ &= \varphi(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f) \le \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p \\ &= \|\varphi\| \cdot \Big(\sum_{j=1}^n \int\limits_M |\chi_{M_j} f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \Big(\int\limits_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\int_{A_n} |g|^q \mathrm{d}\mu \le \|\varphi\|$, und nach Beppo Levi Theorem $g \in L^q(M,\mu)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(f) = \varphi(\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n} f) &= \lim_{n\to\infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} fg \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_M \chi_{A_n} fg \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int\limits_M fg.\end{aligned}$$

□

SATZ 1.11 (L^p Interpolation Ungleichung). *Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(M,\mu) \cap L^{p_1}(M,\mu)$, dann ist $f \in L^{p_\theta}(M,\mu)$ und es gilt*

$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

PROOF. Setze $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$ und $h := |f|^{\theta p_\theta}$. Dann ist $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$, ferner $g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(M,\mu)$ und $h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(M,\mu)$ und

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \le \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. □

SATZ 1.12 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung). *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \le p_i \le \infty$, $f_i \in L^{p_i}$ für $i = 1,\dots,m$. Sei ferner $1 \le p \le \infty$ so, dass $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$. Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \Big\|\prod_{i=1}^n f_i\Big\|_p \le \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

PROOF. ÜA. □

DEFINITION UND SATZ 1.13. *(a) $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) := L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu)$ versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$ ist ein Banachraum.*

(b) Definiere

$$L^1 + L^\infty(M,\mu) := \{f : M \to \mathbb{K} \text{ } mb. : \exists g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu) \\ \text{mit } f = g + h\}.$$

Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty :\ f = g + h : h \in L^1(M,\mu),\ g \in L^\infty(M,\mu)\}.$$

ist eine Norm, mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

SATZ 1.14. *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt $L_p(M,\mu) \subseteq L_1 + L_\infty(M,\mu)$.*

PROOF. Der Fall $p = \infty$ ist trivial. Sei $f \in L^p(M,\mu)$. Setze $A := \{x \in M :\ |f(x)| \ge 1\}$ und $h := \chi_A f$, $g := \chi_{M\setminus A} f$. Dann $g \in L^\infty(M,\mu)$ und $h \in L^1(M,\mu)$, denn

$$\int_M |h| \,\mathrm{d}\mu = \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu \le \int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu \le \int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

□

THEOREM 1.15 (Riesz–Thorin Konvexitätstheorem). *Sei $T : L_1 + L_\infty \to L_1 + L_\infty$ linear, ferner seien $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1,\infty]$ mit $p_0 < p_1$ und $r_0 < r_1$. Sei $\alpha \in (0,1)$ und setze*

$$\tfrac{1}{p_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{p_0} + \tfrac{\alpha}{p_1} \qquad \text{und} \quad \tfrac{1}{r_\alpha} := \tfrac{1-\alpha}{r_0} + \tfrac{\alpha}{r_1}.$$

Dann gilt

$$\|T\|_{\mathscr{L}(L^{p_\alpha}, L^{r_\alpha})} \le \|T\|^{1-\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_0}, L^{r_0})} \|T\|^{\alpha}_{\mathscr{L}(L^{p_1}, L^{r_1})}.$$

Zur Beweis benötigen wir folgenden Satz und folgendes Lemma.

SATZ 1.16 (Hadamard, 3-Linien Satz). *Sei $a < b$ und $f : \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\} \to \mathbb{C}$ analytisch und beschränkt. Weiter sei*

$$M_a = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(a+it)|, \text{ und } M_b = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(b+it)|.$$

Dann gilt:

$$|f(x+iy)| \le M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}, \quad x+iy \in \{z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Re} z \le b\}.$$

PROOF. Wir betrachten $f_\varepsilon(x+iy) = \mathrm{e}^{\varepsilon(x+iy)^2} f(x+iy) M_a^{\frac{x+iy-b}{b-a}} M_b^{\frac{a-(x+iy)}{b-a}}$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt $|f_\varepsilon(a+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon a^2}$ und $|f_\varepsilon(b+iy)| \le \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}$ (Beachte: $|a^{iy}| = 1$ für $a > 0$, $y \in \mathbb{R}$). Außerdem gilt

$$\lim_{y\to\pm\infty} \sup_{a\le x\le b} |f_\varepsilon(x+iy)| = 0.$$

Mit dem Maximumprinzip für analytische Funktionen und ein hinreichend großes Rechteck folgt $|f_\varepsilon(z)| \le \max\{\mathrm{e}^{\varepsilon a^2}, \mathrm{e}^{\varepsilon b^2}\}$. Aus $\varepsilon \to 0^+$ folgt die Behauptung. □

LEMMA 1.17. *Sei $p_0 < p < p_1$ und $f = \sum \alpha_j a_j \chi_{E_j}$ eine Treppenfunktion mit $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $|\alpha_j| = 1$, $a_j > 0$ und $\{E_j\}$ paarweise, disjunkte, mb. Mengen mit (jeweils) endlichem Maß. Weiter sei $\|f\|_p = 1$ und*

$$f_z = \sum \alpha_j a_j^{\frac{p}{p_z}} \chi_{E_j},$$

wobei p_z

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

genügt. Dann gilt:

$$\|f_z\|_{L^{p\mathrm{Re}\, z}} = 1, \quad 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1.$$

PROOF. Es gilt

$$\int |f_z(x)|^{p\mathrm{Re}\, z} d\mu \overset{\text{Ü.A.}}{=} \sum |a_j|^p \mu(E_j).$$

□

BEWEIS V. THEOREM 1.15. Sei $p = p_\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ und betrachte Treppenfunktion f und f' auf M, welche $\|f\|_p = \|f'\|_{p'} = 1$ erfüllen. Sei f_z und f'_z wie in Satz 1.16, wobei f_z mit p_0 und p_1 und f'_z mit r_0 und r_1 konstruiert werden. Nach Voraussetzung ist

$$\Phi(z) := \int_M f'_z(x) T f_z(x) d\mu(x)$$

analytisch in z. Mit Lemma 1.17 folgt nun:

$$|\Phi(j+iy)| \leq \|f'_z\|_{p'} M_j \|f_z\|_p \leq M_j, \quad j = 0, 1,\ y \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\Phi(j+iy)| \leq M_j, \quad j = 0, 1.$$

Damit folgt mit dem 3-Linien Satz, dass

$$|\int f' T f| \leq M_0^{1-\alpha} M_1^\alpha.$$

Da Treppenfunktionen dicht in $L^{p'}$ sind, erhalten wir $\|Tf\|_p \leq M_0^{1-\alpha} M_1^\alpha$. Die Behauptung folgt nun, da Treppenfunktionen auch in L^p dicht sind. □

2. L_p Räume II

Im Folgenden sei μ stets das Lebesgue-Maß und Σ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

SATZ 2.1 (Faltung, Youngsche Ungleichung). *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt*

(a) Für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$

(b) Setzt man

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

so ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_p \qquad 1 \le p \le \infty.$$

PROOF. Sei $p = 1$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \|f\|_1\|g\|_1.$$

Für $p = \infty$ liefert die Hölder-Ungleichung

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \|f\|_1\|g\|_\infty,$$

insbesondere existiert $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Betrachte nun die Abbildung $T_f g := f * g$. Dann folgt aus dem Riesz–Thorin Konvexitätstheorem, dass $T_f \in \mathscr{L}(L^p, L^p)$ und $\|T_f\|_{\mathscr{L}(L^p,L^p)} \le \|f\|_1$ für $1 \le p \le \infty$, d.h. (b) gilt. Ferner erhalten wir mit Beppo-Levi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||\chi_{B(0,r)}g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x \\
&\le \lim_{r\to\infty} \|f\|_1\|\chi_{B(0,r)}g\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y\right)^p < \infty, \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}^d.$$

□

BEISPIEL 2.2.

(a) Betrachte

$$(1-\Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $f \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(x) = (k * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einem Kern $k \in L^1$.

(b) Betrachte

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $u_0 \in L^p$ eine eindeutige Lösung u. Desweiteren besitzt u die Darstellung

$$u(t,x) = (k_t * u_0)(x), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

mit $k_t \in L^1$ für $t > 0$.

KOROLLAR 2.3. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann definiert die Abbildung $Tf := f * g$ einen stetigen linearen Operator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\|T\| \le \|f\|_1$.*

SATZ 2.4. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$.*

PROOF. Wegen $|(f*g)(x)| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$. Sei $x_n \to x$. Setze $F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$ und $F(y) = f(x-y)g(y)$, dann $F_n(y) \to F(y)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^d$. Anderseits, sei K kompakt so, dass $x_n - \operatorname{supp} f \subseteq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $x_n - y \notin \operatorname{supp} f$ falls $y \notin K$, d.h. $f(x_n - y) = 0$ für $y \notin K$, und so $|F_n(y)| \le \|f\|_\infty \chi_K(y)|g(y)|$ integrierbare Majorante. Nach Lebesgueschen Satz folgt $\int F_n\,\mathrm{d}y \to \int F\,\mathrm{d}y$. □

DEFINITION 2.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und setze*

$$O_f := \Big\{ x \in \Omega : \exists V \subset \Omega \text{ offene Umgebung von } x$$
$$\text{mit } f(x) = 0 \text{ für f.a. } x \in V \Big\}$$

Dann heißt $\operatorname{supp} f := \Omega \setminus O_f$ *der* Träger *von f.*

SATZ 2.6. *Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} \tag{5}$$

PROOF. Wegen $|(f*g)(x)| \le \|f\|_1\|g\|_\infty$ existiert $(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ für *alle* $x \in \mathbb{R}^d$. Also

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{(x-\operatorname{supp} f)\cap \operatorname{supp} g} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Falls $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, gilt $(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ und $(f*g)(x) = 0$. □

BEMERKUNG 2.7. *Im Satz 2.6 gilt* $\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g} = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

BEMERKUNG 2.8. *Die obige Aussage (5) gilt auch für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$.*

SATZ 2.9. *Seien $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $f*g \in C^k(\mathbb{R}^d)$, und $D^\alpha(f*g) = D^\alpha f * g$. Insbesondere $f \in C^\infty_c$, $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.*