

## Einführung in die Problematik

### 1. Physikalische Motivation

Betrachte einen Stab aus Metall mit gegebener Temperaturverteilung. Nun wollen wir untersuchen wie die Wärme geleitet wird.

**Annahmen:**

- Stab (isoliert) wird parametrisiert durch das Intervall  $[0, 1]$ ,  $u(t, x) =$  Temperatur in  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ .
- Konstanten:  $\rho$  Dichte,  $c$  spezifische Wärme
- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  Wärmequelle
- Energie in Segment  $[x_1, x_2]$ :  $E(x_2, x_1, t) \approx c\rho(x_2 - x_1)u(t, x_1)$
- Wärmeleitungsregel von Fourier: Sei  $Q(t, x) =$  die Wärme durch Punkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$

$$\frac{Q(t_2, x) - Q(t_1, x)}{t_2 - t_1} \approx -K_0 \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x) \quad K_0 \text{ Thermale Konduktivität}$$

- Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} & c\rho(x_2 - x_1)(u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)) \\ &= (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)f(x_1) - K_0(t_2 - t_1) \left( \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_1) - \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_2) \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{u(t_2, x_1) - u(t_1, x_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(x_1)}{c\rho} + \frac{K_0}{c\rho} \frac{\frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x} u(t_1, x_1)}{x_2 - x_1}$$

und damit

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{f(x)}{c\rho} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x),$$

wobei  $\kappa = \frac{K_0}{c\rho}$  die thermische Diffusivität (eine Konstante) ist.

**Stationäre Temperaturverteilung (Gleichgewicht, steady state):**

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \xrightarrow{u(t,x)=v(x)} 0 = f(x) + \Delta v(x) \implies \Delta v(x) = -f(x).$$

### 2. Mathematische Problemstellung

Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt.

Gegeben: Stetige Funktion  $f$  auf  $\overline{\Omega}$ .

Gesucht: Stetige Funktion  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , in  $\Omega$  zweimal differenzierbar mit

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0(x) & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

**Anwendung:** Potential eines Ladungsfreies elektrisches Feldes.

$u$  stationäre Temperaturverteilung

BEMERKUNG 2.1.  $\Delta$  ist ein linearer Operator  $\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v$ .

**Idee:** Definiere den Laplace-Operator in geeigneten Räumen und untersuche Abbildungsvorschriften.

Sei z.B.  $X := \{h : h \in C^2(\overline{\Omega}), h|_{\partial\Omega} = 0\}$  und  $Y := C(\overline{\Omega})$  und betrachte  $\Delta_{XY} : X \rightarrow Y$ .

*Typische Fragestellungen:*

- Ist  $\Delta_{XY}$  injektiv (d.h. die Lösung der Gleichung ist eindeutig, falls sie existiert)
- Ist  $\Delta_{XY}$  surjektiv (d.h. es existiert eine Lösung der Gleichung für alle  $f \in Y$ ).
- Finde möglichst einen großen Raum  $Y$  so dass  $\Delta_{XY}$  surjektiv ist (d.h. die Gleichung ist für viele  $f$  lösbar).
- Da  $X$  typischerweise nicht explizit gegeben ist, finde möglichst viele Eigenschaften von  $X$  (d.h. Eigenschaften der Lösung).

BEMERKUNG 2.2. (a) *Der Laplace-Operator besitzt keine guten Eigenschaften in  $C(\overline{\Omega})$ . Suche nach geeigneten Räumen führt auf Sobolev-Räume (reflexive Banachräume bzw. Hilberträumen).*

**Idee ( $L_2$ -Theorie):**

- Die Existenz einer *schwachen* Lösung lässt sich im Hilbertraumfall ( $L_2$ -Theorie) sehr einfach über Lax-Milgram zeigen.
- Regularitätstheorie liefert dann eine *starke* bzw. *klassische* Lösung.

BEMERKUNG 2.3. *Eine wichtige Rolle bei der Regularitätstheorie spielt die sogenannte Lokalisierung.*

**Idee ( $L_p$ -Theorie):**

- Betrachten zunächst

$$(\lambda - \Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Benutze die sog. *Fouriertransformation*. Die zentrale Eigenschaft dieser Abbildung ist, dass sie Differentialausdrücke in algebraische umwandelt. Im Fall  $(\lambda - \Delta)$  erhält man

$$(\lambda + |\xi|^2)\mathcal{F}u = \mathcal{F}f.$$

Damit ist die formale Inverse von  $(\lambda - \Delta)$  durch  $u = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}f$  gegeben.

*Typische Fragestellungen:*

- (a) Wie kann man dem formalen Ausdruck  $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$  als Operator:  $Y \rightarrow X$  einen Sinn zu geben?
- (b) Finde hinreichende Bedingungen, so dass  $\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$  ein beschränkter Operator in  $L_p$  ist.

BEMERKUNG 2.4. *Auf diesem Weg werden wir auch erkennen, dass sich  $T = \mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1}\mathcal{F}$  auch als Integraloperator, d.h.  $Tf(x) = \int k(x, y)f(y)dy$ , darstellen lässt.*

Im letzten Abschnitt betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung (1).

**Idee:**

- (a) Betrachte  $u$  als Funktion  $t \rightarrow u(t, \cdot) \in X$ ,  $X$  ein Funktionenraum (Sobolevraum)
- (b) Sei  $\Delta$  der Laplaceoperator und betrachte

$$\begin{aligned} u'(t) - \Delta u(t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL im Banachraum!

- (c) Ana III: Lösung ist  $e^{\Delta t}u_0$ .

*Typische Fragestellungen*

- (a) Vernünftige Definition für  $e^{tA}$  für große Klassen von (Differential-)operatoren.
- (b) Suche Bedingungen an  $A$ , so dass  $e^{tA}$  wohldefiniert ist

BEMERKUNG 2.5. *Für spezielle (in Physik und Ingenieurwissenschaften sehr relevante) Klassen von Differentialoperatoren, sog. Divergenzoperatoren, lässt sich zeigen, dass  $e^{tA}$  wieder ein Integraloperator ist (z.B. Laplace auf beliebigen offenen Mengen).*

## Sobolevräume

### 1. $L_p$ Räume (Erinnerung)

In diesem Abschnitt sei  $(M, \Sigma, \mu)$  stets ein Maßraum.

DEFINITION 1.1.

(a) Sei  $1 \leq p < \infty$ . Setze  $\|f\|_p := \left( \int_M |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ .

(b) Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{K}$  messbar. Dann heißt  $f$  wesentlich beschränkt, falls ein  $\alpha > 0$  existiert mit  $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$ . Ferner heißt

$$\|f\|_\infty := \inf\{\alpha \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

das wesentliche Supremum von  $f$ .

(c) Sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Definiere

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K}) := \{f : f : M \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\}.$$

BEMERKUNG 1.2.

(a)  $\|\cdot\|_p$  ist eine Halbnorm auf  $\mathcal{L}^p$ .

(b) Sei  $f \in \mathcal{L}^p$ . Dann ist  $\|f\|_p = 0$  genau dann wenn

$$f \in \mathcal{N} := \{f : f \text{ messbar und } f = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}\}.$$

(c)  $\mathcal{L}^p$  ist ein Vektorraum.

(d)  $\mathcal{N}$  ist ein Unterraum von  $\mathcal{M}$ , dem Vektorraum der messbaren Funktionen (auch von  $\mathcal{L}^p$ ), und

$$f \sim g \stackrel{\text{Def.}}{\iff} f - g \in \mathcal{N}$$

definiert eine Äquivalenzrelation

DEFINITION 1.3. Der Raum  $L^\infty$  ist definiert durch:

$$L^\infty(M, \mu) := \mathcal{L}(M, \Sigma, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \quad \|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty, \quad \forall [f] \in L^\infty.$$

SATZ 1.4.

(a)  $|f| \leq \|f\|_\infty$   $\mu$ -fast überall.

(b)  $\|\cdot\|_\infty$  ist ein Norm.

(c)  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \implies$  es existiert ein  $A \in \Sigma$  mit  $\mu(A^c) = 0$  und  $f_n \rightarrow f$  gleichmässig auf  $A$ .

(d)  $(L^\infty(M, \mu), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum.

DEFINITION 1.5. Sei  $1 \leq p < \infty$

$$L^p(M, \mu) := (M, \Sigma, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{N}, \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p, \quad \forall [f] \in L^p.$$

SATZ 1.6 (Höldersche Ungleichung). Es sei  $1 \leq p, q \leq \infty$  mit  $1/p + 1/q = 1$  (interpretiere  $1/\infty = 0$ ). Desweiteren seien  $f \in L^p(M, \mu)$  und  $g \in L^q(M, \mu)$ . Dann ist  $f \cdot g \in L^1(M, \mu)$  und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

PROOF. Die Fälle  $p = 1, \infty$  sind trivial. Seien  $a, b \in \mathbb{R}_+$  und  $f, g \neq 0$ . Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (\text{Youngsche Ungleichung}).$$

(Der Beweis dieser Ungleichung ist elementar.) Natürlich ist  $fg$  messbar. Seien  $G := g/\|g\|_q$  und  $F := f/\|f\|_p$ . Anwendung der Youngsche Ungleichung in jedem Punkt  $x \in M$  ergibt nach Integration

$$\int_M |F(x)G(x)| \, d\mu(x) \leq \int_M \frac{|F(x)|^p}{p} \, d\mu(x) + \int_M \frac{|G(x)|^q}{q} \, d\mu(x) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und die Behauptung folgt.  $\square$

SATZ 1.7 (Minkowskische Ungleichung). Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $f, g \in L^p(M, \mu)$ . Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

SATZ 1.8 (Riesz–Fischer). Sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann ist  $L^p(M, \mu)$  vollständig.

SATZ 1.9. Nehmen wir an, dass  $f_n \in L^p(M, \mu)$  gegen  $f \in L^p(M, \mu)$  konvergiert, dann existiert eine Teilfolge  $f_{n_k}$ , so dass  $f_{n_k}(x)$   $\mu$ -fast überall konvergiert.

SATZ 1.10 (Dualität). Sei  $1 \leq p < \infty$ , und  $(M, \Sigma, \mu)$   $\sigma$ -endlicher Maßraum. Sei  $1/p + 1/q = 1$  (so genannte konjugierte Exponente). Dann definiert  $L^q(M, \mu) \rightarrow L^p(M, \mu)'$

$$J(g)f := \int_M f \cdot g \, d\mu, \quad g \in L^q(M, \mu), f \in L^p(M, \mu),$$

einen isometrischen Isomorphismus.

PROOF.  $J$  ist wohldefiniert nach der Hölderschen Ungleichung. Natürlich ist  $J$  linear.  $J$  ist isometrisch, denn sei  $g \in L^q(M, \mu)$  und setze

$$f := \frac{\bar{g}}{|g|} \left( \frac{|g|}{\|g\|_q} \right)^{q/p}.$$

Dann

$$\|f\|_p = \int_M \left( \frac{|\bar{g}|}{|g|} \right)^p \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \, d\mu = 1$$

und  $\int_M fg \, d\mu = \|g\|_q$ . Es bleibt die Surjektivität von  $J$  zu zeigen.

1. Fall  $\mu(M) < \infty$ : Sei  $\varphi \in L^p(M, \mu)'$ . Betrachte  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\nu(A) := \varphi(\chi_A)$  ( $\chi_A \in L^p(M, \mu)$ ).  $\nu$  ist ein signiertes (komplexes) Maß. Ferner ist  $\nu$  absolut stetig bezüglich  $\mu$ , denn  $A \in \Sigma$  und  $\mu(A) = 0$  impliziert  $\chi_A = 0$   $\mu$ -fast überall, d.h.  $\chi_A = 0$  in  $L^p(M, \mu)$ , also  $\nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0$ . Satz von Radony–Nikodým ergibt  $g \in L^1(M, \mu)$  mit

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu = \int_M \chi_A g \, d\mu \quad \forall A \in \Sigma.$$

Also wegen Linearität

$$(3) \quad \varphi(f) = \int_M f g \, d\mu \quad \forall \text{ Treppenfunktionen } f.$$

Ferner  $|\varphi(f)| \leq C' \|f\|_\infty$ . Die Treppenfunktionen sind dicht in  $L^\infty(M, \mu)$  also gilt (3) für  $f \in L^\infty(M, \mu)$ . Wir zeigen nun  $g \in L^q(M, \mu)$ . Sei erst  $q < \infty$ . Setze

$$(4) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$f$  ist messbar und  $|g|^q = f g = |f|^p$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A_n := \{x \in M : |f(x)| \leq n\}$ . Dann ist  $\chi_{A_n} f \in L^\infty(M, \mu)$  und

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |g|^q \, d\mu &= \int_M \chi_{A_n} f g \, d\mu = \varphi(\chi_{A_n} f) \leq \|\varphi\| \|\chi_{A_n} f\|_p = \\ &= \|\varphi\| \left( \int_{A_n} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \|\varphi\| \left( \int_{A_n} |g|^q \, d\mu \right)^{1/p} \\ &\implies \int_{A_n} |g|^q \leq \|\varphi\|^q \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz von Beppo Levi(monotone Konvergenz) gibt  $g \in L^q(M, \mu)$ .

Jetzt betrachten wir der Fall  $q = \infty$ . Dann  $|g| \leq \|\varphi\|$ , denn sei  $A := \{x \in X : |g(x)| > \|\varphi\|\}$ . Setze  $f := \chi_A |g|/g$ ,  $f \in L^\infty(M, \mu)$ . Nehmen wir  $\mu(A) > 0$  an.

$$\mu(A) \|\varphi\| < \int_A |g| \, d\mu = \int_M f g \, d\mu = \varphi(f) \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_1,$$

und nach Annahme  $\implies \mu(A) < \|f\|_1$ , Widerspruch mit  $\mu(A) = \|f\|_1$ . Also  $g \in L^\infty(M, \mu)$ .

Die Treppenfunktionen sind dicht in  $L^p(M, \mu)$  also  $\varphi = Jg$ .

2. Fall,  $\mu(M) = \infty$ : Es sei  $M = \bigcup_{n=1}^\infty M_n$  mit  $\mu(M_n) < \infty$ , und  $M_n$  paarweise disjunkt. Sei  $\varphi \in L^p(M, \mu)'$ . Setze  $\varphi_n(f) := \varphi(\chi_{M_n} f)$ , für  $f \in L^p(M_n, \mu_n)$ , wobei  $\mu_n(A) := \mu(M_n \cap A)$ . Dann  $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$ , insbesondere  $\varphi_n \in L^p(M_n, \mu_n)'$ . Verwende jetzt den ersten Fall um  $g_n \in L^q(M_n, \mu_n)$  zu bekommen. Setze  $g := \sum_{n=1}^\infty g_n$  (in jedem Punkt nur ein Summand,  $g_n$  wird

durch 0 fortgesetzt auf  $M_n^c$ ). Es ist  $g \in L^q(M, \mu)$  und  $\varphi = Jg$  zu zeigen. Sei  $A_n := \bigcup_{j=1}^n M_j$  und  $f$  wie in (4)

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |g|^q d\mu &= \sum_{j=1}^n \int_{M_j} fg d\mu = \sum_{j=1}^n \int \chi_{M_j} f g_j d\mu = \sum_{j=1}^n \varphi(\chi_{M_j} f) \\ &= \varphi\left(\sum_{j=1}^n \chi_{M_j} f\right) \leq \sum_{j=1}^n \|\varphi\| \|\chi_{M_j} f\|_p \\ &= \|\varphi\| \cdot \left(\sum_{j=1}^n \int \chi_{M_j} |f|^p d\mu\right)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \left(\int_{A_n} |g|^q d\mu\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\int_{A_n} |g|^q d\mu \leq \|\varphi\|$ , und nach Beppo Levi Theorem  $g \in L^q(M, \mu)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n} f\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\chi_{A_n} f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} fg \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \chi_{A_n} fg \stackrel{\text{Lebesgue}}{=} \int_M fg. \end{aligned}$$

□

**SATZ 1.11** ( $L^p$  Interpolation Ungleichung). *Seien  $p_0, p_1 \in [1, \infty]$ ,  $\theta \in (0, 1)$  und  $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ . Sind  $f \in L^{p_0}(M, \mu) \cap L^{p_1}(M, \mu)$ , dann ist  $f \in L^{p_\theta}(M, \mu)$  und es gilt*

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^\theta.$$

**PROOF.** Setze  $g := |f|^{(1-\theta)p_\theta}$  und  $h := |f|^{\theta p_\theta}$ . Dann ist  $gh = |f|^{(1-\theta)p_\theta + \theta p_\theta} = |f|^{p_\theta}$ , ferner  $g \in L^{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}}(M, \mu)$  und  $h \in L^{\frac{p_1}{\theta p_\theta}}(M, \mu)$  und

$$\|f\|_{p_\theta}^{p_\theta} = \|gh\|_1 \leq \|g\|_{\frac{p_0}{(1-\theta)p_\theta}} \cdot \|h\|_{\frac{p_1}{\theta p_\theta}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p_\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta p_\theta},$$

mit der Verwendung der Hölderschen Ungleichung. □

**SATZ 1.12** (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung). *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p_i \leq \infty$ ,  $f_i \in L^{p_i}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Sei ferner  $1 \leq p \leq \infty$  so, dass  $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$ . Dann gilt*

$$\prod_{i=1}^n f_i \in L^p \quad \text{und} \quad \left\| \prod_{i=1}^n f_i \right\|_p \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}.$$

**PROOF.** ÜA. □

**DEFINITION UND SATZ 1.13.** (a)  $L^1 \cap L^\infty(M, \mu) := L^1(M, \mu) \cap L^\infty(M, \mu)$  versehen mit der Norm  $\|f\|_{1 \cap \infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$  ist ein Banachraum.

(b) *Definiere*

$$L^1 + L^\infty(M, \mu) := \{f : M \rightarrow \mathbb{K} \text{ mb.} : \exists g \in L^1(M, \mu), h \in L^\infty(M, \mu) \\ \text{mit } f = g + h\}.$$

*Die Abbildung*

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty : f = g + h : h \in L^1(M, \mu), g \in L^\infty(M, \mu)\}.$$

*ist eine Norm, mit der  $L^1 + L^\infty$  ein Banachraum ist.*

SATZ 1.14. *Sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt  $L_p(M, \mu) \subseteq L_1 + L_\infty(M, \mu)$ .*

PROOF. Der Fall  $p = \infty$  ist trivial. Sei  $f \in L^p(M, \mu)$ . Setze  $A := \{x \in M : |f(x)| \geq 1\}$  und  $h := \chi_A f$ ,  $g := \chi_{M \setminus A} f$ . Dann  $g \in L^\infty(M, \mu)$  und  $h \in L^1(M, \mu)$ , denn

$$\int_M |h| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu \leq \int_A |f|^p \, d\mu \leq \int_M |f|^p \, d\mu.$$

□

THEOREM 1.15 (Riesz–Thorin Konvexitätstheorem). *Sei  $T : L_1 + L_\infty \rightarrow L_1 + L_\infty$  linear, ferner seien  $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1, \infty]$  mit  $p_0 < p_1$  und  $r_0 < r_1$ . Sei  $\alpha \in (0, 1)$  und setze*

$$\frac{1}{p_\alpha} := \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_\alpha} := \frac{1-\alpha}{r_0} + \frac{\alpha}{r_1}.$$

*Dann gilt*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_\alpha}, L^{r_\alpha})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_0}, L^{r_0})}^{1-\alpha} \|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_1}, L^{r_1})}^\alpha.$$

Zur Beweis benötigen wir folgenden Satz und folgendes Lemma.

SATZ 1.16 (Hadamard, 3-Linien Satz). *Sei  $a < b$  und  $f : \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b\} \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und beschränkt. Weiter sei*

$$M_a = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(a + it)|, \quad \text{und} \quad M_b = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(b + it)|.$$

*Dann gilt:*

$$|f(x + iy)| \leq M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}, \quad x + iy \in \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b\}.$$

PROOF. Wir betrachten  $f_\varepsilon(x + iy) = e^{\varepsilon(x+iy)^2} f(x + iy) M_a^{\frac{x+iy-b}{b-a}} M_b^{\frac{a-(x+iy)}{b-a}}$  für  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt  $|f_\varepsilon(a + iy)| \leq e^{\varepsilon a^2}$  und  $|f_\varepsilon(b + iy)| \leq e^{\varepsilon b^2}$  (Beachte:  $|a^{iy}| = 1$  für  $a > 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ). Außerdem gilt

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \sup_{a \leq x \leq b} |f_\varepsilon(x + iy)| = 0.$$

Mit dem Maximumprinzip für analytische Funktionen und ein hinreichend großes Rechteck folgt  $|f_\varepsilon(z)| \leq \max\{e^{\varepsilon a^2}, e^{\varepsilon b^2}\}$ . Aus  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  folgt die Behauptung. □

LEMMA 1.17. Sei  $p_0 < p < p_1$  und  $f = \sum \alpha_j a_j \chi_{E_j}$  eine Treppenfunktion mit  $\alpha_j \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha_j| = 1$ ,  $a_j > 0$  und  $\{E_j\}$  paarweise, disjunkte, mb. Mengen mit (jeweils) endlichem Maß. Weiter sei  $\|f\|_p = 1$  und

$$f_z = \sum \alpha_j a_j^{p_z} \chi_{E_j},$$

wobei  $p_z$

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$$

genügt. Dann gilt:

$$\|f_z\|_{L^{p_{\operatorname{Re} z}}} = 1, \quad 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1.$$

PROOF. Es gilt

$$\int |f_z(x)|^{p_{\operatorname{Re} z}} d\mu \stackrel{\ddot{U}.A.}{=} \sum |a_j|^p \mu(E_j).$$

□

BEWEIS V. THEOREM 1.15. Sei  $p = p_\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$  und betrachte Treppenfunktion  $f$  und  $f'$  auf  $M$ , welche  $\|f\|_p = \|f'\|_{p'} = 1$  erfüllen. Sei  $f_z$  und  $f'_z$  wie in Satz 1.16, wobei  $f_z$  mit  $p_0$  und  $p_1$  und  $f'_z$  mit  $r_0$  und  $r_1$  konstruiert werden. Nach Voraussetzung ist

$$\Phi(z) := \int_M f'_z(x) T f_z(x) d\mu(x)$$

analytisch in  $z$ . Mit Lemma 1.17 folgt nun:

$$|\Phi(j + iy)| \leq \|f'_z\|_{p'} M_j \|f_z\|_p \leq M_j, \quad j = 0, 1, \quad y \in \mathbb{R}$$

d.h.

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\Phi(j + iy)| \leq M_j, \quad j = 0, 1.$$

Damit folgt mit dem 3-Linien Satz, dass

$$\left| \int f' T f \right| \leq M_0^{1-\alpha} M_1^\alpha.$$

Da Treppenfunktionen dicht in  $L^{p'}$  sind, erhalten wir  $\|Tf\|_p \leq M_0^{1-\alpha} M_1^\alpha$ . Die Behauptung folgt nun, da Treppenfunktionen auch in  $L^p$  dicht sind. □

## 2. $L_p$ Räume II

Im Folgenden sei  $\mu$  stets das Lebesgue-Maß und  $\Sigma$  die  $\sigma$ -Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.

SATZ 2.1 (Faltung, Youngsche Ungleichung). Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt

$$(a) \text{ Für fast alle } x \in \mathbb{R}^d \text{ ist } y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

(b) Setzt man

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, dy$$

so ist  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$  und es gilt

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

PROOF. Sei  $p = 1$ . Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \, dy \, dx \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, dx \, dy \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Für  $p = \infty$  liefert die Hölder-Ungleichung

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, dy \right| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty,$$

insbesondere existiert  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, dy$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Betrachte nun die Abbildung  $T_f g := f * g$ . Dann folgt aus dem Riesz-Thorin Konvexitätstheorem, dass  $T_f \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$  und  $\|T_f\|_{\mathcal{L}(L^p, L^p)} \leq \|f\|_1$  für  $1 \leq p \leq \infty$ , d.h. (b) gilt. Ferner erhalten wir mit Beppo-Levi

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)| \, dy \right)^p \, dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||\chi_{B(0,r)}g(y)| \, dy \right)^p \, dx \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|f\|_1 \|\chi_{B(0,r)}g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p, \end{aligned}$$

d.h.

$$\left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)| \, dy \right)^p < \infty, \text{ f.a. } x \in \mathbb{R}^d.$$

□

BEISPIEL 2.2.

(a) Betrachte

$$(1 - \Delta)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes  $f \in L^p$  eine eindeutige Lösung  $u$ . Desweiteren besitzt  $u$  die Darstellung

$$u(x) = (k * f)(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einem Kern  $k \in L^1$ .

(b) Betrachte

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Dann existiert für jedes  $u_0 \in L^p$  eine eindeutige Lösung  $u$ . Desweiteren besitzt  $u$  die Darstellung

$$u(t, x) = (k_t * u_0)(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit  $k_t \in L^1$  für  $t > 0$ .

KOROLLAR 2.3. Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , dann definiert die Abbildung  $Tf := f * g$  einen stetigen linearen Operator auf  $L^p(\mathbb{R}^d)$  mit  $\|T\| \leq \|f\|_1$ .

SATZ 2.4. Sei  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ . Dann  $f * g \in C(\mathbb{R}^d)$ .

PROOF. Wegen  $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$  existiert  $(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) dy$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Sei  $x_n \rightarrow x$ . Setze  $F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$  und  $F(y) = f(x - y)g(y)$ , dann  $F_n(y) \rightarrow F(y)$  für fast alle  $y \in \mathbb{R}^d$ . Andererseits, sei  $K$  kompakt so, dass  $x_n - \text{supp } f \subseteq K$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann  $x_n - y \notin \text{supp } f$  falls  $y \notin K$ , d.h.  $f(x_n - y) = 0$  für  $y \notin K$ , und so  $|F_n(y)| \leq \|f\|_\infty \chi_K(y) |g(y)|$  integrierbare Majorante. Nach Lebesgueschen Satz folgt  $\int F_n dy \rightarrow \int F dy$ .  $\square$

DEFINITION 2.5. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  messbar und setze

$$O_f := \left\{ x \in \Omega : \exists V \subset \Omega \text{ offene Umgebung von } x \right. \\ \left. \text{mit } f(x) = 0 \text{ für f.a. } x \in V \right\}$$

Dann heißt  $\text{supp } f := \Omega \setminus O_f$  der Träger von  $f$ .

SATZ 2.6. Sei  $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ . Dann gilt

$$(5) \quad \text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$$

PROOF. Wegen  $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$  existiert  $(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) dy$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Also

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy = \int_{(x - \text{supp } f) \cap \text{supp } g} f(x - y)g(y) dy.$$

Falls  $x \notin \text{supp } f + \text{supp } g$ , gilt  $(x - \text{supp } f) \cap \text{supp } g = \emptyset$  und  $(f * g)(x) = 0$ .  $\square$

BEMERKUNG 2.7. Im Satz 2.6 gilt  $\overline{\text{supp } f + \text{supp } g} = \text{supp } f + \text{supp } g$ .

BEMERKUNG 2.8. Die obige Aussage (5) gilt auch für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

SATZ 2.9. Seien  $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ , und  $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g$ . Insbesondere  $f \in C^\infty_c$ ,  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \implies f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ .