Fachbereich Mathematik
M. Geißert
R. Haller-Dintelmann
H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 20.6.2008

PDG I

11. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Wir definieren den Dirichlet-Laplace-Operator in $L^2(\Omega)$ durch

$$D(\Delta_\Omega^D) := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta f \in L^2(\Omega) \text{ im schwachen Sinne}\}, \qquad \Delta_\Omega^D f = \Delta f.$$

Zeigen Sie, dass Δ_Ω^D Erzeuger einer C_0-Halbgruppe von Kontraktionen auf $L^2(\Omega)$ ist.

(G 2)

Folgern Sie Korollar 7.4.8 der Vorlesung aus Theorem 7.4.7. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor.

(a) $\mathrm{i}\mathbb{R} \subseteq \varrho(A)$ und $\|R(\mathrm{i}s, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M/|s|$, wobei $M = \sup_{\mathrm{Re}(\lambda)>0} \|\lambda R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}$ ist.

(b) Sei $\mu = r+\mathrm{i}s \in \Sigma_{\pi/2+\varepsilon} \setminus \overline{\Sigma_{\pi/2}}$ mit $\varepsilon = \arctan((2M)^{-1})$. Dann gilt $\|rR(\mathrm{i}s, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/2$.

(c) $\Sigma_{\pi/2+\varepsilon} \subseteq \varrho(A)$ und $\|\mu R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2M + 1$ für alle $\mu \in \Sigma_{\pi/2+\varepsilon}$.