Fachbereich Mathematik
M. Geißert
R. Haller-Dintelmann
H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 13.6.2008

PDG I

10. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Beweisen Sie Lemma 2.2 (Rescaling) der Vorlesung:

Ist $(A, D(A))$ Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T auf einem Banachraum X und $\lambda \in \mathbb{C}$, so erzeugt der Operator $B := \lambda + A$ mit $D(B) = D(A)$ die C_0-Halbgruppe $S(t) := \mathrm{e}^{\lambda t} T(t)$, $t \geq 0$ auf X.

(G 2)

Wir wollen den allgemeinen Fall des Satzes von Hille-Yosida in Theorem 2.6 beweisen. Überlegen Sie sich dazu folgendes.

(a) Es reicht den Fall $\omega = 0$ zu betrachten.

(b) Wir definieren für jedes $\mu > 0$ auf X die Normen

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\|_X, \quad x \in X.$$

Zeigen Sie, dass diese Normen alle gleichmäßig äquivalent zur X-Norm sind und folgende Beziehungen gelten.

(i) $\|\lambda R(\lambda, A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ für alle $0 < \lambda \leq \mu$.

(ii) $\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_X \leq \|x\|_\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda \leq \mu$.

(iii) $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$ für alle $0 < \lambda \leq \mu$.

(c) Zeigen Sie, dass die Norm $|||x||| := \lim_{\mu \to \infty} \|x\|_\mu$ auf X wohldefiniert und wieder äquivalent zur X-Norm ist.

(d) Schließen Sie den Beweis ab, indem Sie zeigen, dass A in $(X, |||\cdot|||)$ eine Kontraktions-Halbgruppe erzeugt.