Fachbereich Mathematik
M. Geißert
R. Haller-Dintelmann
H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 6.6.2008

PDG I
9. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien X, Y Banachräume, $u \in C([a,b];X)$ und $B \in \mathcal{L}(X,Y)$. Folgern Sie aus $B\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Bu(t)\,\mathrm{d}t$ die folgenden Aussagen.

(a) $\left\langle x', \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \right\rangle = \int_a^b \langle x', u(t)\rangle\,\mathrm{d}t$ für jedes $x' \in X'$.

(b) Die Abbildung $C([a,b];X) \ni u \mapsto \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \in X$ ist linear.

(c) Ist $(A, D(A))$ ein abgeschlossener Operator in X und $u \in C([a,b];D(A))$, so gilt

$$A\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Au(t)\,\mathrm{d}t.$$

(G 2)

Es sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie, dass durch

$$T(t) := \mathrm{e}^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad t \geq 0,$$

eine normstetige Halbgruppe auf X mit $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \mathrm{e}^{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}t}$ gegeben ist.

(G 3)

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen C_0-Halbgruppen auf den jeweiligen Banachräumen sind.

(a) $X = BUC(\mathbb{R}) := \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid u \text{ beschränkt und gleichmäßig stetig}\}$ und

$$T : [0,\infty) \to BUC(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad (T(t)f)(s) := f(s+t) \qquad \text{(Linkstranslations-Halbgruppe).}$$

(b) $X = L^p((0,1))$ für $1 \leq p < \infty$ und $T : [0,\infty) \to X$ mit

$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} f(s+t), & \text{falls } 0 \leq s \leq 1-t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(Linkstranslations-Halbgruppe).}$$

Bemerkung: Man beachte, dass $T(t)f = 0$ für alle $t \geq 1$ und alle $f \in X$ gilt. Eine solche Halbgruppe nennt man *nilpotent*.

(c) $X = L^2(\mathbb{R}^d)$ und $T : [0,\infty) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $T(0) = I$ und

$$(T(t)f)(x) := G_t * f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{-d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,\mathrm{d}y, \quad t > 0, \qquad \text{(Gauß-Halbgruppe).}$$