



PDG I

8. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Zeigen Sie:

(a) Sei $d = 1$, $\lambda > 0$. Dann gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}^{-1}(\lambda + |\xi|^2)^{-1})(x) = k(x) := \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x|}}{\sqrt{\lambda}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Sei $d = 1$, $\lambda > 0$. Dann gilt:

$$\|k\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{1}{\lambda}.$$

Insbesondere löst $u(x) := (k * f)(x)$ die Gleichung $(\lambda - \Delta)u = f$ für $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(G 2) (Inhomogene Randbedingung)

Es sei $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$. Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta)u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}_+^d \\ u &= g && \text{auf } \partial\mathbb{R}_+^d \end{aligned}$$

Zeigen Sie weiter die Abschätzung

$$\|u\|_{2,p} \leq C \|g\|_{2,p}.$$