Fachbereich Mathematik
M. Geißert
R. Haller-Dintelmann
H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 23.5.2008

PDG I

7. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei T ein Calderón-Zygmund-Operator mit Kern K. Zeigen Sie, dass dann T^* auch ein Calderón-Zygmund-Operator mit Kern $K^*(x,y) = \bar{K}(y,x)$ ist.

(G 2)

Es sei $\Omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ eine Funktion, die C^∞ in einer Umgebung der Einheitssphäre $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ ist. Zeigen Sie, dass

$$K(x,y) = \Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)\frac{1}{|x-y|^d}$$

ein Calderón-Zygmund-Kern ist.

(G 3) (Hardy-Littlewood Maximalfunktion)

Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ eine messbare Funktion. Wir definieren die Maximalfunktion von f durch

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie, dass für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, wobei $1 < p \le \infty$, auch $Mf \in L^p(\mathbb{R}^d)$ gilt und

$$\|Mf\|_p \le C_p \|f\|_p.$$

Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

(a) Zeigen Sie: Ist $E \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge endlichen Maßes und $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von Kugeln mit $E \subset \cup B_\alpha$. Dann gibt es endlich viele paarweise disjunkte Kugeln $B_1, \ldots, B_N$, so dass

$$\sum_{i=1}^N |B_i| \ge \frac{1}{2 \cdot 3^d}|E|.$$

(b) Zeigen Sie, dass M vom schwachen $(1,1)$-Typ ist.