



PDG I

6. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Berechnen Sie $\mathcal{F}\delta$.

(G 2) (Cauchy Hauptwert)

(a) Zeigen Sie, dass $ch - \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\mathcal{F}(ch - \frac{1}{x})$.

(c) Zeigen Sie, dass der Operator definiert durch $Hf := ch - \frac{1}{x} * f$ für $f \in C_c^\infty$ zu einem stetigen Operator auf $L^2(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann.

(G 3)

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T \mapsto D^\alpha T$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ stetig auf \mathcal{S}' ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $f, g \in \mathcal{S}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Operationen $+$ und \cdot , definiert durch $(f, g) \mapsto f + g$ und $f \mapsto \lambda \cdot f$ stetig auf $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ bzw. \mathcal{S} sind.

(G 4) (Heisenberg Ungleichung)

Zeigen Sie, dass für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{S}$

$$d \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^2 dx \leq 2 \|x\varphi\|_2 \cdot \|\nabla\varphi\|_2$$

gilt.