Fachbereich Mathematik
M. Geißert
R. Haller-Dintelmann
H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 9.5.2008

PDG I

5. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Zeigen Sie, dass $\mathcal{S} \neq \emptyset$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/t}, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist. Betrachten Sie dann die Funktion $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch $\psi(x) := \Phi(-1/(1 - |x|^2))$.

(G 2)

(a) Es sei $T \in \mathcal{S}'$ und p ein Polynom. Zeigen Sie, dass $pT, D^\alpha T \in \mathcal{S}'$ für $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

(b) Zeigen Sie, dass die Delta-Distribution $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ eine temperierte Distribution ist. Berechnen Sie weiter $\partial_i \delta$ und $\delta * \varphi$ für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(G 3)

Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Heaviside Funktion definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie h' in $\mathcal{S}'$.

(G 4)

Zeigen Sie, dass eine Menge $O \subset \mathcal{S}$ genau dann offen ist, wenn es für jedes $f \in O$ eine endliche Auswahl an Halbnormen p_i und reelle Zahlen $\varepsilon_i > 0$ gibt, so dass

$$\bigcap_{i=1}^{N} \{g : p_i(f - g) < \varepsilon_i\} \subset O.$$