Fachbereich Mathematik
M. Geißert, R. Haller-Dintelmann, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
02.05.2007

4. Übungsblatt zur PDG I

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Neumann–Randbedingung)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt mit C^1-Rand.
Seien $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq d$ mit $a_{ij} = a_{ji}$ und $a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $a_0(x) \geq 0$ für jede $x \in \Omega$.
Wir setzen die Elliptizitätsbedingung voraus:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > \alpha|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,$$

für ein $\alpha > 0$. Das Ziel ist das das folgende Problem, das so genannte Neumann–Problem, zu lösen

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i\Big(a_{ij}\partial_j u\Big) + a_0 u &= f \quad \text{in } \Omega \\ -\sum_{j=1}^{d} \nu_i\Big(\sum_{i=1}^{d} a_{ij}\partial_j u\Big) &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{NP}$$

(a) Erfüllt die Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ (NP), so heißt u *klassische Lösung* von (NP). Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (NP), falls

$$a(\varphi, u) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\partial_j\varphi\partial_i u + \int_\Omega a_0\varphi u = -\int_{\partial\Omega} \varphi g \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega \varphi f, \quad \varphi \in H^1(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass jede klassische Lösung auch eine schwache Lösung ist, und umgekehrt ist eine schwache Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ immer auch eine klassische Lösung.

(b) Wir betrachten nun die homogene Randbedingung, d.h. $g = 0$. Beweisen Sie, dass eine eindeutige, schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ zu (NP) existiert, falls $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$. Ferner gibt es eine von f unabhängige Konstante C, so dass die Lösung u die Abschätzung $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ erfüllt.

Hinweis: Eine schwache Lösung existiert auch, falls $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und $a_0 \in L^\infty(\Omega)$.

(c) Sei jetzt $a_0 = 0$, $g = 0$ und $\int_\Omega f = 0$ (und Ω zusammenhängend). Setze $M := \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u = 0\}$. Zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen von (NP) in M. Diese Lösungen sind bis auf Addition einer Konstante eindeutig in $H^1(\Omega)$ bestimmt. Zeigen Sie auch, dass eine schwache Lösung in $H^1(\Omega)$ nur existieren kann, falls $\int_\Omega f = 0$ gilt.

(d) Angenommen, dass es überhaupt ein $u_0 \in BC^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gibt, das die Randbedingung in (NP) erfüllt, zeigen Sie, dass (NP) eine eindeutige schwache Lösung besitzt, falls die in (b) an die Koeffizienten gestellte Bedingungen erfüllt sind.

Hinweis: Die folgende Aussagen sind bekannt und können ohne Beweis verwendet werden.

(a) **(Äußere Normale)** Es existiert eine stetige Funktion $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$, so dass für jedes $x \in \partial\Omega$ der Vektor $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_d(x))$ der äußere Normalenvektor von $\partial\Omega$ in Punkt x ist. Ferner gilt $|\nu(x)| = 1$.

(b) **(Randintegral)** Für ein $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ist das Randintegral von f definiert durch

$$\int_{\partial\Omega} f \, \mathrm{d}\sigma,$$

wobei σ das Oberfläche-Maß bezeichnet.

(c) **(Gauß–Ostrogradsky-Theorem)** Sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\nu_i \, \mathrm{d}\sigma \qquad \text{für } i = 1, \ldots, d.$$

(d) **(Poincaré-Ungleichung)** Es gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad u \in M.$$

Lösung:

(a) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung von (NP). Dann folgt mit partieller

Integration (vgl. Hinweis (c))

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi f &= -\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \varphi \partial_i \Big(a_{ij} \partial_j u \Big) + \int_\Omega \varphi a_0 u \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \partial_i \varphi a_{ij} \partial_j u - \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i a_{ij} \partial_j u \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega \varphi a_0 u \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \partial_i \varphi a_{ij} \partial_j u + \int_{\partial\Omega} \varphi g \,\mathrm{d}\sigma + \int_\Omega \varphi a_0 u, \quad \varphi \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

d.h. u ist ein schwache Lösung. Sei nun umgekehrt $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine schwache Lösung von (NP). Dann gilt für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (Beachte: die Randterme fallen weg!):

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \varphi \partial_i \left(a_{ij} \partial_j u \right) + \int_\Omega \varphi a_0 u = a(\varphi, u) = \int_\Omega \varphi f,$$

d.h. die erste Gleichung in (NP) ist fast überall erfüllt (im L^2-Sinne). Ist f zusätzlich stetig, so folgt, dass die erste Gleichung in (NP) überall erfüllt ist. Für $\varphi \in H^1(\Omega)$ erhalten wir nun:

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_{\partial\Omega} \varphi \left(g + \nu_i a_{ij} \partial_j u \right) \,\mathrm{d}\sigma.$$

Da $H^1(\Omega)|_{\partial\Omega}$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist (ohne Beweis) folgt die Behauptung wie oben.

(b) Mit der Elliptizitätsbedingung folgt:

$$a(u,u) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 + \alpha_0 \int_\Omega |u|^2 \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

d.h. die Form a ist koerziv auf $H^1(\Omega)$. Da sie auch stetig ist und $\int_\Omega f\varphi$ ein stetiges lineares Funktional auf $H^1(\Omega)$ mit $\|f\|_{H^1(\Omega)'} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$ ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung von (NP) mit Lax-Milgram. Des Weiteren gilt:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c} \|f\|_{H^1(\Omega)'} \leq \frac{1}{c} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(c) Wir betrachten $a : M \times M \to \mathbb{R}$. Dann ist a koierziv (vgl. Poincare Unlgeichung in Hinweis (d)). Die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung in M folgt nun wie in (b). Beachte: ist $f \in L^2(\Omega)$, so gilt $f = f - \int_\Omega f$ in M'.

Offenbar ist $u+K$ für $K \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine schwache Lösung von (NP) in $H^1(\Omega)$ (Wieso darf man mit $\varphi \in H^1(\Omega)$ testen?).
Sei nun $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (NP). Dann ist $u - \int_\Omega u$ ebenfalls eine schwache Lösung von (NP) und nach dem eben bewiesenen ist diese Eindeutig.
Setze $\varphi \equiv 1 \in H^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_\Omega 1 \cdot f = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij} \partial_j u \partial_i 1 = 0.$$

Daher ist $\int_\Omega f = 0$ eine *notwendige* Bedingung für die Existenz einer schwachen Lösung in $H^1(\Omega)$.

(d) Wir setzten $v = u - u_0$. Dann ist u eine schwache Lösung von (NP) genau dann, wenn v eine schwache Lösung von

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{d} \partial_i\Big(a_{ij}\partial_j v\Big) + a_0 v &= f + \sum\limits_{i,j=1}^{d} \partial_i\Big(a_{ij}\partial_j u_0\Big) - a_0 u_0 \quad \text{in } \Omega \\ -\sum\limits_{j=1}^{d} \nu_i\Big(\sum_{i=1}^{d} a_{ij}\partial_j u\Big) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

ist. Setze also $\tilde{f} = f + \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i\Big(a_{ij}\partial_j u_0\Big) - a_0 u_0$ und nutze obige Resultate.

Aufgabe G2

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $1 \leq p < d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$

(b) $p = d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ für alle $r \in [p, \infty)$

(c) $p > d \Longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

jeweils mit stetiger Einbettung.
Sei $p > d$ und $\theta = 1 - \frac{d}{p}$. Dann existiert $C := C_{\Omega,p,d}$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^\theta \qquad \forall f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Lösung: Betrachte den Fortsetzungsoperator F.

(a) Sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt wegen des Sobolev–Einbettungsatzes für $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|Ff\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C\|Ff\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \leq CC'\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(b) Genau wie in (a).

(c) Sei $x, y \in \Omega$. Es gilt

$$|f(x)-f(y)| = |(Ff)(x)-(Ff)(y)| \leq C\|Ff\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)}|x-y|^\theta \leq CC'\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^\theta.$$

Aufgabe G3

Sei $m \in \mathbb{N}$ $(m \geq 1)$ und $1 \leq p < \infty$. Die folgende Aussagen sind zu beweisen:

(a) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ für alle $r \in [d, \infty)$

(b) $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$

jeweils mit stetiger Einbettung.

(a) Sei $\frac{1}{p} - \frac{m}{d} < 0$, $m - d/p \notin \mathbb{N}$. Setze

$$k := \left[m - \tfrac{d}{p}\right] \qquad \text{und} \quad \theta := m - \tfrac{d}{p} - k,\ 0 < \theta < 1.$$

Dann existiert eine Konstante C, so dass für jede $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f\|_{L^\infty} &\leq C\|f\|_{W^{m,p}} && \text{für alle } |\alpha| \leq k \\ |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| &\leq C\|f\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta && \text{für fast alle } x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| = k. \end{aligned}$$

Lösung: Wir benutzen die bekannte Einbettungssätze für $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, d.h. $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ für $|\alpha| \leq m$. Sei $r \in [d, \infty)$ beliebig und setze $r_m = p$, dann gilt für $i = 2, \ldots, m$

$$\|D^\alpha u\|_{L^{r_{i-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq C_i \|D^\beta u\|_{W^{1,r_i}(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{falls } |\beta| = |\alpha| + 1 = i \text{ und } \frac{1}{r_{i-1}} = \frac{1}{r_i} - \frac{1}{d},$$

mit Konstanten C_i und für $i = 1$ und $r_1 = d$

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C_1\|u\|_{W^{1,r_1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Also

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{falls } 0 = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{d} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{d} - \frac{1}{d} = \cdots = \frac{1}{r_m} - \frac{m}{d} = \frac{1}{p} - \frac{m}{d}.$$

(b) Sei $0 \leq n < m$, so dass $\frac{1}{p} - \frac{n+1}{d} < 0$ und $\frac{1}{p'} := \frac{1}{p} - \frac{n}{d} \geq 0$. Dann gilt

$$W^{n,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d),$$

mit stetiger Einbettung, und wie vorher

$$W^{n+1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{1,p'}(\mathbb{R}^d),$$

auch mit stetiger Einbettung. Schließlich sind die Einbettungen

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{n+1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{1,p'}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

auch stetig (für die letzen Ungleichung bemerke, dass $\frac{1}{p'} - \frac{1}{d} < 0$).

(c) Man beweist mit Induktion und ähnlich zu (b).