Fachbereich Mathematik
M. Geißert, R. Haller-Dintelmann, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
25.04.2007

3. Übungsblatt zur PDG I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es sei $d \geq 2$ und $1 \leq p < \infty$, sowie $\mathbb{R}^d_+ := \{x \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$ der Halbraum und für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $x = (x', x_d)$ mit $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$. Wir wollen $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ Funktionen am Rand von $\mathbb{R}^d_+$ auswerten. Beweisen Sie dazu die folgende Aussagen:

(a) Für alle $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ gilt

$$u(x', 0) = -\int_0^\infty \frac{\partial u(x', x_d)}{\partial x_d} \, \mathrm{d}x_d.$$

(b) Für alle $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ gilt $\|u(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)}$.

(c) **(Spursatz)** Es gibt eine eindeutige stetige lineare Abbildung $\Gamma : W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \to L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ mit $\Gamma u = u|_{\partial \mathbb{R}^d_+}$ für $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$.

Lösung:

(a) Für $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ gilt

$$-\int_0^r \frac{\partial u(x', x_d)}{\partial x_d} \, \mathrm{d}x_d = u(x', 0) - u(x', r) \quad \text{für } r > 0.$$

Da der Träger von u kompakt in $\overline{\mathbb{R}^d_+}$ ist, erhalten wir die gewünschte Identität für $r \to \infty$.

(b) Aus Teil (a) erhalten wir für $p > 1$

$$|u|^p(x', 0) = -p \int_0^\infty |u|^{p-1}(x', x_d) \mathrm{sign(u)} \frac{\partial u(x', x_d)}{\partial x_d} \, \mathrm{d}x_d$$

Die Hölder Ungleichung liefert nun mit der Youngschen Ungleichung (für $p \geq 1$)

$$|u|^p(x',0) \leq p\Big(\int_0^\infty u^p(x',x_d)\,\mathrm{d}x_d\Big)^{(p-1)/p}\Big(\int_0^\infty\Big(\frac{\partial u(x',x_d)}{\partial x_d}\Big)^p\,\mathrm{d}x_d\Big)^{1/p} \leq$$
$$\leq C\int_0^\infty |u|^p(x',x_d)\,\mathrm{d}x_d + \int_0^\infty\Big|\frac{\partial u(x',x_d)}{\partial x_d}\Big|^p\,\mathrm{d}x_d.$$

Integrieren wir diese Ungleichung in x' so erhalten wir

$$\|u(\cdot,0)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C\int_{\mathbb{R}^d_+}|u|^p(x',x_d)\,\mathrm{d}x_d + \int_{\mathbb{R}^d_+}\Big|\frac{\partial u(x',x_d)}{\partial x_d}\Big|^p\,\mathrm{d}x_d \leq \|u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)}.$$

(c) Nach Teil b) ist der lineare Operator

$$\widetilde{\Gamma} : C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d_+}) \to L^p(\mathbb{R}^{d-1}), \qquad \widetilde{\Gamma}u := u|_{\partial\mathbb{R}^d_+}$$

stetig, wenn $C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^d})$ mit der $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$-Norm versehen ist. Dieser Operator ist in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ dicht definiert, also besitzt er eine (eindeutige) stetige Fortsetzung Γ auf $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$.

Aufgabe G2

Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

(b) Es existiert $C > 0$

$$\Big|\int_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big| \leq C\cdot\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}, \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1,\dots,d.$$

Lösung: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt

$$\Big|\int_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big| = \Big|\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\Big| \leq \|\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}$$

falls $\|f\|_{L^p(\Omega)} \neq 0$ (sonst ist die Ungleichung trivial).

(b) $\Rightarrow$ (a): Nach Voraussetzung ist das Funktional

$$\Psi(\varphi) := \int_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

stetig auf dem normierten Vektorraum $(C_c^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^q(\Omega)})$. Also besitzt Ψ eine stetige Fortsetzung auf $L^q(\Omega)$, denn für $1 \leq q < \infty$ ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^q(\Omega)$. Dann existiert $g \in L^p(\Omega)$ (da $L^q(\Omega)' = L^p(\Omega)$) mit $\Psi(\varphi) = \int_\Omega g\varphi$. Also $\int_\Omega g\varphi = \int_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, d.h. $D_i f = -g$ und $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

Aufgabe G3

Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 < p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind

(a) $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

(b) Es existiert $C > 0$ so, dass für jede $\Omega' \subset \Omega$ mit $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$ und für alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \Omega^c)$

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} \leq C|h|.$$

Lösung: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \operatorname{dist}\,(\Omega', \Omega^c)$. Dann gilt (Beachte: $\frac{d}{dt}\varphi(x+th) = (\nabla\varphi)(x+th)h$):

$$\begin{aligned}
\|\tau_h\varphi - \varphi\|_{L^p(\Omega')} &= \left(\int\limits_{\Omega'} \left|\int\limits_0^1 (\nabla\varphi)(x+th)h \,\mathrm{d}t\right|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |h| \left(\int\limits_{\Omega'} \int\limits_0^1 |(\nabla\varphi)(x+th)|^p \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |h| \left(\int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega'} |(\nabla\varphi)(x+th)|^p \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} = h\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann existiert $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\|u - \varphi_n|_\Omega\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$. Damit folgt:

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} = \lim_{n\to\infty} \|\tau_h\varphi_n - \varphi_n\|_{L^p(\Omega')} \leq \lim_{n\to\infty} |h|\|\nabla\varphi_n\|_{L^p(\Omega)} = |h|\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\Omega' = \overline{\overset{\circ}{\operatorname{supp}}\,\varphi}$ (das Innere des Trägers) und $h_0 = \operatorname{dist}\,(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega f\partial_{x_i}\varphi &= \lim_{h\to 0} \int\limits_\Omega f\frac{\tau_{he_i}\varphi - \varphi}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\int\limits_\Omega f\frac{\tau_{he_i}\varphi}{h} - \int\limits_\Omega f\frac{\varphi}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\int\limits_\Omega \tau_{-he_i}f\frac{\varphi}{h} - \int\limits_\Omega f\frac{\varphi}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\int\limits_\Omega \frac{\tau_{-he_i}f - f}{h}\varphi \\
&\leq \sup_{|h|\leq h_0} \frac{1}{h}\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')}\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Aufgabe G2.