Fachbereich Mathematik
M. Geißert, R. Haller-Dintelmann, H. Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
11.04.2007

1. Übungsblatt zur PDG I

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Für $k \in \mathbb{N}$ wird induktiv

$M_k := \left\{x \in 2^{-k}\mathbb{Z}^d \, : \overline{B(x, 2^{1-k})} \subseteq \Omega, B(x, 2^{1-k}) \not\subset B(y, 2^{1-l}) \text{ für alle } y \in M_l \text{ mit } l < k\right\}$

definiert. Zeigen Sie, dass $(B(x, 2^{1-k}))_{x\in M_k, k\in\mathbb{N}}$ eine lokal finite Überdeckung von Ω ist.

Lösung: Offenbar gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{x\in M_k} B(x, 2^{1-k}) = \Omega$.

Wir zeigen, dass die überdeckung lokal endlich ist. Sei $y \in \Omega$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $x \in M_k$ mit $y \in B(x, 2^{1-k})$. Sei $d = 2\text{dist }(y, B(x, 2^{1-k})^c)$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{1-k_0} < d$. Dann gilt:

$$y \notin \bigcup_{l\geq k_0} \bigcup_{x\in M_l} B(x, 2^{1-l}).$$

Aufgabe G2

Für $h \in \mathbb{R}^d$ betrachte man den Operator T_h, definiert durch

$$(T_h f)(x) = f(x + h), \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Beweisen Sie die Stetigkeit von $T_h : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ und der Funktion $\mathbb{R}^d \ni h \mapsto T_h f$ für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Lösung: Die Stetigkeit von T_h folgt aus $\|T_h f\|_p = \|f(\cdot + h)\|_p = \|f\|_p$.

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\varphi - f\|_p \leq \varepsilon$. Da φ gleichmässig stetig ist, existiert ein $h_0 > 0$ mit

$$\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p \leq \tilde{\varepsilon}|\text{supp } \varphi|^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad h \leq h_0.$$

Daher folgt:

$$\|f(\cdot + h) - f\|_p \leq \|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_p + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p \leq 3\varepsilon, \quad h \leq h_0$$

Aufgabe G3

(a) Zeigen Sie $|a^{iy}| = 1$ für $a > 0$ und $y \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie Lemma 1.17 der Vorlesung.

(c) Diskutieren Sie die Beweisidee von Korollar 2.17 und Satz 2.18.

Aufgabe G4

Zeigen Sie

(a) Der Raum $L^1 \cap L^\infty(M,\mu) := L^1(M,\mu) \cap L^\infty(M,\mu)$, versehen mit der Norm $\|f\|_{1\cap\infty} := \|f\|_1 + \|f\|_\infty$, ist ein Banachraum.

(b) Definiere $L^1 + L^\infty(M,\mu) := \{f : f : M \to \mathbb{K}$ messbar und $\exists g \in L^1(M,\mu),\ h \in L^\infty(M,\mu)$ mit $f = g + h\}$. Die Abbildung

$$\|f\|_{1+\infty} := \inf\{\|h\|_1 + \|g\|_\infty : h \in L^1,\ f \in L^\infty\}.$$

ist eine Norm, mit der $L^1 + L^\infty$ ein Banachraum ist.

(c) Es gilt $L^p(M,\mu) \hookrightarrow L^1 + L^\infty(M,\mu)$, wobei die Einbettung stetig ist.

Lösung:

(a) Es ist klar, dass $\|\cdot\|_{1\cap\infty}$ eine Norm ist.
Sei nun $(u_n) \subset L^1 \cap L^\infty(M,\mu)$ eine Cauchyfolge. Dann ist (u_n) auch eine Cauchyfolge in $L^1(M,\mu)$ und $L^\infty(M,\mu)$. Wegen der Vollständigkeit von $L^1(M,\mu)$ und $L^\infty(M,\mu)$ folgt, dass (u_n) in $L^1(M,\mu)$ und $L^\infty(M,\mu)$ konvergiert. Da jede konvergente Folge in $L^\infty(M,\mu)$ fast überall punktweise konvergiert und jede konvergenteFolge in $L^1(M,\mu)$ eine Teilfolge besitzt, die fast überall punktweise konvergiert, stimmen die Grenzwerte überein. Daher konvergiert (u_n) auch in $L^1 \cap L^\infty(M,\mu)$. vollständig ist.

(b) Die Homogenität und die Dreicksungleichung sind klar. Sei $u \in L^1 + L^\infty$ mit $\|u\|_{1+\infty} = 0$. Dann existieren zu $\varepsilon > 0$ Funktionen $h_\varepsilon \in L^1(M,\mu)$ und $h_\varepsilon \in L^\infty(M,\mu)$ mit $\|h_\varepsilon\|_1 \leq \varepsilon$, $\|g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ und $u = h_\varepsilon + g_\varepsilon$. Nach Satz der Vorlesung dürfen wir annehmen, dass $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Daher folgt:

$$u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x) = 0, \text{ für fast alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Also ist $\|\cdot\|_{1+\infty}$ eine Norm.
Sei $(u_n) \subset L^1 + L^\infty(M,\mu)$ eine Cauchyfolge. Wähle eine Teilfolge $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ mit

$$\|u_{n_k} - u_{n_{k+1}}\|_{1+\infty} \leq \frac{1}{k^2}$$

und $h_k \in L^1(M,\mu)$, $g_k \in L^\infty(M,\mu)$ mit

$$\|u_{n_1}\|_{1+\infty} > \|h_1\|_1 + \|g_1\|_\infty + \frac{1}{2}\|u_{n_1}\|_{1+\infty},$$
$$\|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\|_{1+\infty} > \|h_k\|_1 + \|g_k\|_\infty + \frac{1}{2}\|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\|_{1+\infty}, \quad k > 1.$$

Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_1 + \|h_k\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{n} \|u_{n_k} - u_{n_{k-1}}\|_{1+\infty} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

wobei $u_{n_0} \equiv 0$. Wegen der Vollständigkeit von $L^1(M,\mu)$ und $L^\infty(M,\mu)$ existieren Grenzfunktionen $h \in L^1(M,\mu)$ und $g \in L^\infty(M,\mu)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g_k = g, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} h_k = h.$$

Es gilt nun:

$$\|u_{n_k} - (h+g)\|_{1+\infty} \leq \| \sum_{l=1}^{k} h_k - h\|_1 + \| \sum_{l=1}^{k} g_k - g\|_\infty \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$