6 Trennung der Variablen – Beispiele

Beispiel 6.1 Gesucht wird die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Aufgrund der Geometrie des Würfels Ω ist es naheliegend, Lösungen in der Form

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \tag{6.2}$$

d. h. mit „getrennten Variablen", zu suchen. Setzt man eine solche Funktion u in (6.1) ein, erhält man

$$-X''(x)Y(y) - X(x)Y''(y) = 0$$

und folglich

$$-\frac{X''}{X}(x) = \frac{Y''}{Y}(y).$$

Dann muss es aber eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$-X'' = \lambda X \quad \text{in } (0,1),\ -Y'' = -\lambda Y \quad \text{in } (0,1), \tag{6.3}$$

geben, d. h., X und Y müssen Eigenfunktionen des Differentialoperators $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ zum Eigenwert λ bzw. $-\lambda$ sein.

Konkret betrachten wir einen stetigen Randwert g auf $\partial\Omega$ mit $g = 0$ für $x = 0$ und $x = 1$, aber

$$g(x,0) = 0, \quad g(x,1) = f(x), \tag{6.4}$$

so dass f die Kompatibilitätsbedingung $f(0) = f(1)$ erfüllt. Dann muss auch $X(0) = X(1) = 0$ gelten. Daraus folgern wir, dass X das *Eigenwertproblem*

$$-X'' = \lambda X \quad \text{in } (0,1),\ X(0) = X(1) = 0, \tag{6.5}$$

löst. Die allgemeine Lösung von (6.5) ist - ohne Berücksichtigung der Randwerte - Linearkombination der Funktionen $e^{\sqrt{-\lambda}x}$ und $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, oder in anderer Schreibweise, Linearkombination der Funktionen $\cos\sqrt{\lambda}x$ und $\sin\sqrt{\lambda}x$. Aufgrund der Randbedingungen besitzt (6.5) nur für die Werte

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine nichttriviale Lösung, nämlich

$$X_n(x) = \sin n\pi x.$$

Wegen $\lambda_n = n^2\pi^2$, (6.3) und (6.4), muss Y dann die Gleichung

$$-Y'' = -n^2\pi^2 Y, \quad Y(0) = 0,$$

erfüllen. Folglich ist Y ein Vielfaches der Funktion

$$Y_n(y) = \sinh n\pi y.$$

Zusammenfassend schließen wir, dass

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = \sin n\pi x \ \sinh n\pi y$$

eine spezielle Lösung von $-\Delta u = 0$ in Ω mit der Randbedingung $u(x,0) = 0$ ist.

Um auch die Randbedingung $u(x,1) = f(x)$ zu erfüllen, bilden wir formal eine beliebige Linearkombination der Lösungen u_n:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \ \sinh n\pi y$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann muss für $y = 1$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \sinh n\pi) \sin n\pi x, \ \ x \in [0,1],$$

gelten, also mit $b_n = c_n \sinh n\pi$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad \text{in } [0,1].$$

Diese gesuchte Reihendarstellung von f auf $[0,1]$ stimmt mit der Fourier-Reihenentwicklung der ungeraden Funktion $\tilde{f}$ auf $[-1,1]$ als reine Sinus-Reihe überein, wenn man f durch Spiegelung ungerade von $[0,1]$ auf $[-1,1]$ durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,1] \\ -f(-x), & x \in [-1,0) \end{cases}$$

fortsetzt. Die Unbekannten b_n sind die entsprechenden Fourier-Koeffizienten

$$b_n = \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x) \sin n\pi x \, dx = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx.$$

Damit erhalten wir als formale Lösung u der Laplace-Gleichung (6.1), (6.4) die unendliche Reihe

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh n\pi} \sin n\pi x \sinh n\pi y, \\ b_n &= 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Da für $f \in C^0[0,1]$ die Fourier-Koeffizienten (b_n) eine Nullfolge sind und $\sinh n\pi \sim \frac{1}{2}e^{n\pi}$, $\sinh n\pi y \sim \frac{1}{2}e^{n\pi y}$ für $n \to \infty$ gilt, ist die Reihe in (6.6) nicht nur für alle $(x,y) \in \Omega$ konvergent, sondern sogar zweimal nach x, y partiell differenzierbar. Insbesondere gilt $-\Delta u = 0$ in Ω. Außerdem werden die Randwerte

$$u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 0,\ u(x,0) = 0$$

angenommen. Schließlich gilt

$$u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x,$$

so dass unter geeigneten Voraussetzungen an f, z. B. $f \in C^1[0,1]$ und $f(0) = f(1) = 0$, auch $u(x,1) = f(x)$ gültig ist. Es bleibt jedoch die Frage offen, ob u für $y = 1$ stetig ist, d. h., ob die Konvergenz

$$u(x,y) \to f(x) \quad \text{für } y \to 1- \tag{6.7}$$

gilt.

Beispiel 6.2 Wir betrachten nun die Laplace-Gleichung auf der Kreisscheibe $B_1 = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } B_1, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial B_1, \end{aligned} \tag{6.8}$$

und versuchen mit Polarkoordinaten (r,φ), $r > 0$, $\varphi \in [0,2\pi]$, den Separationsansatz

$$u(x) = u(r,\varphi) = R(r)\phi(\varphi). \tag{6.9}$$

Wegen

$$\Delta u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r}\partial_r u + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u$$

erhalten wir $R''\phi + \frac{1}{r}R'\phi + \frac{1}{r^2}R\phi'' = 0$ und somit

$$\frac{1}{R}(r^2R'' + rR')(r) = -\frac{\phi''}{\phi}(\varphi).$$

Folglich gibt es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$-\phi'' = \lambda\phi \quad \text{in } [0,2\pi]. \tag{6.10}$$

Da ϕ 2π-periodisch in φ ist, hat dieses Eigenwertproblem genau die folgenden Lösungen:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 0 \quad &\text{und} \quad \phi_0(\varphi) = 1, \\ \lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}, \quad &\text{und} \quad \phi_n(\varphi) = \cos n\varphi, \phi_n(\varphi) = \sin n\varphi; \end{aligned} \tag{6.11}$$

jedes $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ist also doppelter Eigenwert. Dann muss $R(r)$ für $\lambda = \lambda_n = n^2$ die sog. *Eulersche Differentialgleichung*

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0, \quad r \in [0,1], \tag{6.12}$$

erfüllen. Als Randbedingung wird nur gefordert, dass $R(r)$ für $r \to 0$ stetig ist. Im Fall $n = 0$ erhält man die Lösung

$$R(r) = a + b\log r,$$

wobei $b = 0$ gelten muss. Für $n \in \mathbb{N}$ hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + \lambda - n^2$$

zu (6.12) die Nullstellen $\lambda = \pm n$, so dass die allgemeine Lösung von (6.12)

$$R(r) = ar^n + br^{-n}$$

lautet. Da $b = 0$ sein muss, liefert der Separationsansatz (6.9) die Lösungen

$$u_n(r,\varphi) = a_n r^n \cos n\varphi + b_n r^n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit erhält man die formale Lösung

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n \cos n\varphi + b_n r^n \sin n\varphi) \tag{6.13}$$

von $-\Delta u = 0$ in B_1.

Zur Lösung des Randwertproblems (6.8) muss zusätzlich (formal)

$$g(\varphi) = u(1,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{6.14}$$

gelten. Die Unbekannten a_n, b_n sind also die Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion $g(\varphi)$, und es gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi.$$

Da (a_n) und (b_n) Nullfolgen sind, konvergiert die Reihe (6.13) für alle $\varphi \in [0,2\pi]$ und $r \in [0,1)$ und stellt eine unendlich oft stetig partiell differenzierbare Funktion bzgl. r,φ und auch bzgl. x,y dar. Für $r = 1$ gilt (6.14) punktweise für alle $\varphi \in [0,2\pi]$, wenn z. B. g stetig differenzierbar ist. Dagegen ist die Konvergenz

$$u(r,\varphi) \to u(1,\varphi) \quad \text{für } r \to 1-,$$

also die punktweise Annahme der Randwerte, schwieriger zu analysieren.

Beispiel 6.3 Wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung auf dem Intervall $(0,l)$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0,l) \\ u(0,\cdot) &= f \quad \text{für } t = 0 \\ u_t(0,\cdot) &= 0 \quad \text{für } t = 0 \\ u(t,0) = u(t,l) &= 0 \quad \text{für } t = 0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Dabei sollte f die Kompatibilitätsbedingung $f(0) = f(l) = 0$ erfüllen. Der Separationsansatz

$$u(t,x) = X(x)T(t), \tag{6.16}$$

vgl. Beispiel 6.1, liefert die Gleichungen

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X \text{ in } (0,l) \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -T'' = \lambda c^2 T \text{ in } \mathbb{R} \\ T'(0) = 0 \end{cases}. \tag{6.17}$$

Das erste Randwertproblem in (6.17) besitzt eine nichttriviale Lösung X nur für

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad \text{mit } X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l},\ n \in \mathbb{N}.$$

Zu $\lambda = \lambda_n$ besitzt das zweite Randwertproblem in (6.17) die (bis auf skalare Vielfache) eindeutige Lösung

$$T_n(l) = \cos\frac{n\pi c}{l}t.$$

Zusammengefasst liefert der Separationsansatz (6.16) die allgemeine (formale) Lösung

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} \tag{6.18}$$

der Wellengleichung. Um $u(0,\cdot) = f$ zu erreichen, sollte zusätzlich

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

gelten. Die Unbekannten b_n sind also die Fourier-Koeffizienten der Entwicklung von f in eine Sinus-Reihe auf $(0,l)$, vgl. Beispiel 6.1, und es gilt

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Die Eigenschaft, dass (b_n) eine Nullfolge ist, reicht aber nicht aus, um die Konvergenz der Reihe (6.18) mit elementaren Mitteln zu zeigen. Darüber hinaus ist nicht ohne Weiteres klar, ob u nach t und x zweimal partiell differenzierbar ist.

Beispiel 6.4 Die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $(0,\pi)$

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times(0,\pi) \\ u(0,\cdot) &= f \quad \text{in } (0,\pi) \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) &= 0 \quad \text{in } (0,\infty) \end{aligned} \tag{6.19}$$

legt den Separationsansatz

$$u(t,x) = X(x)T(t),$$

vgl. (6.16), nahe. Dabei genüge f wieder der Kompatibilitätsbedingung $f(0) = f(\pi) = 0$. Statt (6.17) gelangen wir zu den Anfangs- bzw. Randwertproblemen

$$\begin{cases} X'' = -\lambda \quad \text{in } (0,\pi) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \quad T' = -\lambda kT. \tag{6.20}$$

Daraus erhalten wir

$$\lambda_n = n^2,\ X_n(x) = \sin nx \quad \text{und } T_n(t) = e^{-n^2kt},$$

sowie die formale Lösung

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2kt} \sin nx. \tag{6.21}$$

Um den Anfangswert $u(0,\cdot) = f$ zu erfüllen, muss zusätzlich

$$f(x) = \sum_{n=x}^{\infty} b_n \sin nx$$

gelten. Die Unbekannten (b_n) sind also wieder die Fourier-Koeffizienten von f als Sinus-Reihe auf $(0,\pi)$, d. h.,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx. \tag{6.22}$$

Da (b_n) eine Nullfolge ist und e^{-n^2kt} für jedes $t > 0$ exponentiell schnell in $n \in \mathbb{N}$ abklingt, ist $u(t,x)$ in (6.21) beliebig oft nach t, x partiell differenzierbar. Die Aussage

$$u(t,x) \to u(0,x) = f(x) \quad \text{für } t \to 0+$$

verlangt jedoch einen aufwändigeren Beweis.

Für jedes feste $t > 0$ setzen wir (6.22) in (6.21) ein und erhalten

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(y)\sin ny\, dy\Big)\, e^{-n^2kt}\sin nx \\ &= \int_0^{\pi} f(y)K(x,y,t)\, dy \end{aligned}$$

mit dem Integralkern

$$K(x,y,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2kt}\sin ny \sin nx; \tag{6.23}$$

dabei ist die Vertauschung der Integration mit der Summenbildung wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in $(x,y) \in [0,\pi]\times[0,\pi]$ gerechtfertigt. Der *Wärmeleitungskern* K ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf $[0,\pi]\times[0,\pi]\times(0,\infty)$. Ferner hat K die folgenden Eigenschaften

(1) $K \geq 0$ auf $[0,\pi]\times[0,\pi]\times(0,\infty)$

(2) $\int_0^\infty K(x,y,t)\,dy \leq 1$ für alle $x \in [0,\pi]$ und $t > 0$.

Zum Beweis von (1) nehmen wir die Existenz eines Punktes $(x,y) \in (0,\pi)\times(0,\pi)$ und $t > 0$ mit $K(x,y,t) < 0$ an. Da K stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$K(x,y',t) < 0 \quad \text{für alle } |y'-y| < \varepsilon.$$

Dazu wählen wir eine Funktion $f \in C^0[0,\pi]$ mit $f > 0$ im Intervall $(y-\frac{\varepsilon}{2}, y+\frac{\varepsilon}{2})$ und $f = 0$ in $[0,\pi]\backslash(y-\frac{\varepsilon}{2}, y+\frac{\varepsilon}{2})$. Dann gilt für die Lösung u von (6.19) mit Anfangswert f

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^\pi f(y)K(x,y,t)\,dy \\ &= \int_{y-\varepsilon/2}^{y+\varepsilon/2} f(y)K(x,y,t)\,dy \\ &< 0. \end{aligned}$$

Nach dem schwachen Minimumprinzip (analog zum schwachen Maximumprinzip, s. Satz 5.21) gilt aber

$$\min_{[0,t]\times[0,\pi]} u = \min_{t=0 \text{ oder } x\in\{0,\pi\}} u = 0.$$

Damit ist (1) bewiesen.

Zum Beweis von (2) betrachten wir eine Folge $(f_n) \subset C^0[0,\pi]$ von Anfangswerten mit der Eigenschaft $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$, $0 \leq f_n \leq 1$ und $f_n(x) = 1$ auf $[\frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}]$. Dann gilt für die entsprechenden Lösungen (u_n) von (6.19)

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \int_0^\pi f_n(y)K(x,y,t)\,dy \\ &\to \int_0^\pi K(x,y,t)\,dy \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Außerdem ist nach dem schwachen Maximumprinzip Satz 5.21

$$\max_{[0,\pi]} u_n(t,\cdot) = \max_{t=0 \text{ oder } x\in\{0,\pi\}} u_n = \max_{[0,\pi]} f_n = 1.$$

Damit ist auch die Aussage (2) bewiesen. Wir erwähnen noch, dass in (2) kein Gleichheitszeichen stehen kann, da $\int_0^\pi K(x,y,t)\,dy$ für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindet.

Beispiel 6.5 (Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung mit Neumann-Randbedingung)
Wir betrachten die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{auf } \mathbb{R} \times (0,\ell) \\ u(0) &= f && \text{auf } (0,\ell) \\ u_t(0) &= 0 && \text{auf } (0,\ell) \\ u_x(t,0) = u_x(t,\ell) &= 0 && \text{für } t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{6.24}$$

sowie

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{auf } (0,\infty) \times (0,\ell) \\ u(0) &= f && \text{auf } (0,\ell) \\ u_x(t,0) = u_x(t,\ell) &= 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Der Separationsansatz $u(t,x) = X(x)T(t)$ liefert für X das Randwertproblem

$$-X'' = \lambda X, \quad X'(0) = X'(\ell) = 0$$

mit den nichttrivialen Lösungen

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad \text{und} \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann erhält man wie in den vorhergehenden Beispielen 6.3 und 6.4 die formale Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos\frac{n\pi t}{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

für (6.24) sowie

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-(n\pi/\ell)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

für (6.25). Die Koeffizienten (a_n) sind die Fourier-Koeffizienten von f aus der cosinus-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell},$$

so dass also

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

gelten muss.

Beispiel 6.6 (Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung mit Robin-Randbedingung)
Wie im Beispiel 6.5 betrachten wir die Wellengleichung sowie die Wärmeleitungsgleichung im Intervall $(0,\ell)$ mit Anfangswert $u(0,\cdot) = f$ (sowie ggf. $u_t(0,\cdot) = 0$); als Randbedingung wählen wir jedoch die Bedingungen

$$\begin{aligned} u_x(t,0) - a_0 u(t,0) &= 0 \\ u_x(t,\ell) + a_\ell u(t,\ell) &= 0 \end{aligned} \tag{6.26}$$

mit positiven Konstanten a_0 und a_ℓ. Die Wahl der Vorzeichen ergibt sich z. B. im Fall der Wärmeleitungsgleichung, wo u die Temperatur und u_x den Temperaturgradienten bezeichnen; ist die Temperatur im Innern (in $(0,\ell)$) größer als außen, wird Energie nach außen abgestrahlt ($u_x(t,0) < 0 < u_x(t,\ell)$).

Der Separationsansatz $u(t,x) = X(x)T(t)$ führt auf das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -X'' &= \lambda X && \text{in } (0,\ell) \\ X' - a_0 X &= 0 && \text{in } x = 0 \\ X' + a_\ell X &= 0 && \text{in } x = \ell \end{aligned} \tag{6.27}$$

mit den zu bestimmenden Eigenwerten $\lambda \in \mathbb{C}$. Im Folgenden schreiben wir der Einfachheit halber $\lambda = \beta^2$.

Die allgemeine Lösung

$$X(x) = c\cos\beta x + d\sin\beta x \tag{6.28}$$

der Differentialgleichung 2. Ordnung muss jetzt die Randbedingungen in (6.27) erfüllen. Folglich müssen die Unbekannten $c, d \in \mathbb{C}$ das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -a_0 & \beta \\ a_\ell\cos\beta\ell - \beta\sin\beta\ell & \beta\cos\beta\ell + a_\ell\sin\beta\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Um $(c,d) \neq (0,0)$ erreichen zu können, muss die Determinante der obigen Matrix verschwinden. Diese Determinantenbedingung führt auf die transzendente Gleichung

$$(\beta^2 - a_0 a_\ell)\tan\beta\ell = (a_0 + a_\ell)\beta \tag{6.29}$$

falls $\cos\beta\ell \neq 0$ ist, bzw. auf die Gleichung

$$\cos\beta\ell = 0, \quad \beta^2 = a_0 a_\ell. \tag{6.30}$$

Die zweite Möglichkeit (mit $\beta = \pm\sqrt{a_0 a_\ell}$, $\beta = (k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$, $k \in \mathbb{Z}$) kann nur auftreten, falls $\sqrt{a_0 a_\ell}\frac{\ell}{\pi} = |k + \frac{1}{2}|$, $k \in \mathbb{Z}$, gilt; eine zugehörige Eigenfunktion ist

$$X(x) = \beta\cos\beta x + a_0\sin\beta x, \quad \beta = \sqrt{a_0 a_\ell}.$$

Deshalb widmen wir uns jetzt der Analyse der Gleichung (6.29), die wir zu

$$\tan \beta\ell = \frac{(a_0 + a_\ell)\beta}{\beta^2 - a_0 a_\ell} \tag{6.31}$$

umschreiben können.

Zuerst suchen wir Nullstellen $\beta > 0$ von (6.31); mit $\beta > 0$ ist auch $-\beta$ eine Nullstelle, führt aber zum gleichen Eigenwert $\lambda = \beta^2$ mit der gleichen Eigenfunktion X nach (6.28). Gleichung (6.31) kann nur numerisch gelöst werden. Eine Diskussion der Graphen der Funktionen

$$\tan \beta\ell \quad \text{und} \quad \frac{(a_0 + a_\ell)\beta}{\beta^2 - a_0 a_\ell}, \quad \beta > 0,$$

liefert jedoch sofort das Ergebnis, dass (6.31) in jedem Intervall $\big(\frac{n\pi}{\ell}, \frac{(n+1)\pi}{\ell}\big)$, $n \in \mathbb{N}_0$, genau eine Nullstelle β_n hat. Folglich gibt es eine Folge von Eigenwerten $\lambda_n = \beta_n^2$ mit

$$\big(\frac{n\pi}{\ell}\big)^2 < \lambda_n < \big(\frac{(n+1)\pi}{\ell}\big)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Außerdem erkennt man, dass

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\lambda_n - \big(\frac{n\pi}{\ell}\big)^2\Big) = 0$$

gilt. Wegen $-a_0 c + \beta_n d = 0$ ist $X_n(x) = \cos \beta_n x + \frac{a_0}{\beta_n} \sin \beta_n x$, oder, nach Normierung,

$$X_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n}(x - \alpha_n), \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \arctan \frac{a_0}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{6.32}$$

eine zugehörige Eigenfunktion. Es fällt auf, dass mit $n \to \infty$ sich die Eigenwerte λ_n wie die Eigenwerte $\big(\frac{n\pi}{\ell}\big)^2$ des Neumann-Problems verhalten und dass sich die Eigenfunktionen $\cos \sqrt{\lambda_n}(x - \alpha_n)$ wie die Eigenfunktionen $\cos \frac{n\pi}{\ell} x$ des Neumann-Problems verhalten, da die Phasenverschiebung α_n für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Nach der Diskussion der Eigenwerte $\lambda = \beta^2 > 0$ von (6.27) ist noch zu zeigen, dass es keine weiteren Eigenwerte $\lambda \leq 0$ oder $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ gibt.

Lemma 6.7 (1) *Das Eigenwertproblem* (6.27) *besitzt nur Eigenwerte* $\lambda > 0$.

(2) *Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten stehen im Sinne des* L^2-*Skalarproduktes*

$$(u, v) = \int_0^\ell u\overline{v}\, dx$$

senkrecht aufeinander.

Beweis

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von (6.27) und $X(x)$ eine zugehörige (komplexwertige) Eigenfunktion. Wir testen (6.27) mit X und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^\ell |X|^2\,dx &= \int_0^\ell \lambda X \cdot \overline{X}\,dx = -\int_0^\ell X''\overline{X}\,dx \\ &= \int_0^\ell |X'|^2\,dx - X'\overline{X}\,|_0^\ell \\ &= \int_0^\ell |X'|^2\,dx + a_\ell|X(\ell)|^2 + a_0|X(0)|^2 > 0.\end{aligned}$$

Folglich muss $\lambda > 0$ sein.

(2) Seien X, Y Eigenfunktionen von (6.27) zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \mu > 0$. Dann folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^\ell X\overline{Y}\,dx &= \int_0^\ell -X''\overline{Y}\,dx = \int_0^\ell X'\overline{Y'}\,dx - X'\overline{Y}\,|_0^\ell \\ &= \int_0^\ell X'\overline{Y'}\,dx + a_\ell(X\overline{Y})(0) + a_0(X\overline{Y})(0) \\ &= \cdots = \int_0^\ell X\overline{(-Y'')}\,dx \\ &= \mu \int_0^\ell X\overline{Y}\,dx.\end{aligned}$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ folgt daraus die Behauptung $\int_0^\ell X\overline{Y}\,dx = 0$.

■

Mit Kenntnis aller Eigenwerte $(\lambda_n) \subset (0, \infty)$ und zugehöriger Eigenfunktionen $X_n(x)$, s. (6.32), können wir die Anfangsrandwertprobleme der Wellengleichung und der Wärmeleitungsgleichung bei gegebenen Anfangswerten wie in den Beispielen 6.3– 6.5 formal durch einen Reihenansatz lösen. Für die Wellengleichung erhält man mit den Funktionen

$$T_n(t) = \cos\sqrt{\lambda_n}t, \quad n \in \mathbb{N},$$

als Lösung der Gleichung $-T'' = \lambda_n T$, $T'(0) = 0$, die formale Lösung

$$\begin{aligned}u(t,x) &= \sum_{n=1}^\infty b_n X_n(x)\,T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^\infty b_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n}(x - \alpha_n)\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,t\right) \qquad (6.33)\end{aligned}$$

mit α_n aus (6.32). Dabei sind die Koeffizienten b_n aus der Anfangsbedingung

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, X_n(x) \tag{6.34}$$

zu bestimmen. Analog benutzt man für die Wärmeleitungsgleichung die Funktionen

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

als Lösung der Gleichung $T' = -\lambda_n T$ und erhält die formale Lösung

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, X_n(x)\, e^{-\lambda_n t}. \tag{6.35}$$

Wie zuvor müssen die Koeffizienten b_n aus der Anfangsbedingung $f(x) = u(0,x)$, also aus (6.34) bestimmt werden.

Es bleibt das Problem, (b_n) aus (6.34) zu bestimmen. Unter der Voraussetzung, dass die Reihe in (6.34) gleichmäßig auf $[0,\ell]$ konvergiert, folgt aus der Orthogonalität der Eigenfunktionen $\big(X_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\cos\sqrt{\lambda_n}(x-\alpha_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, s. Lemma 6.7(2), für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$(f, X_k) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\ell} X_n(x)\cdot X_k(x)\,dx = b_k \int_0^{\ell} X_k^2(x)\,dx. \tag{6.36}$$

Die Größe

$$\int_0^{\ell} X_k^2(x)dx = \|\cos\sqrt{\lambda_k}(\cdot - \alpha_k)\|^2_{L^2(0,\ell)},$$

das Quadrat der $L^2(0,\ell)$-Norm der Funktion $\cos\big(\sqrt{\lambda_k}(x-\alpha_k)\big)$ kann nicht explizit berechnet werden; es gilt jedoch für große $k \in \mathbb{N}$

$$\|X_k\|^2_{L^2(0,\ell)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_{-\sqrt{\lambda_k}\alpha_k}^{\sqrt{\lambda_k}(\ell-\alpha_k)} \cos^2 y\,dy \le \frac{\ell}{k\pi} \int_{-\pi}^{(k+1)\pi} \cos^2 y\,dy \le \ell$$

sowie

$$\|X_k\|^2_{L^2(0,\ell)} \ge \frac{\ell}{(k+1)\pi} \int_0^{(k-1)\pi} \cos^2 y\,dy \ge \frac{\ell}{4}\,.$$

Mit der Notation $\|u\|_2 = \|u\|_{L^2(0,\ell)} = (u,u)^{1/2}$ folgt aus (6.36)

$$b_n = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|_2^2}\,. \tag{6.37}$$

Wir interpretieren (b_n) als die *verallgemeinerten Fourier-Koeffizienten von f bzgl. des Orthogonalsystems* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und (6.34), d.h. die formale Reihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, X_n) X_n}{\|X_n\|_2^2}\,, \tag{6.38}$$

als *verallgemeinerte Fourier-Reihenentwicklung bzgl.* (X_n). Die Konvergenzanalyse von (6.38) und der Lösungen (6.33) bzw. (6.35) ist jedoch wesentlich schwieriger als bei der klassischen Theorie der Fourier-Reihen.

Beispiel 6.8 Wir betrachten die zweidimensionale Wellengleichung für die Kreisscheibe

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\},$$

also das Problem

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} - c^2 \Delta u & = & 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \Omega \\ u & = & 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \partial\Omega \\ u(0) & = & 0 & \text{für } t = 0 \\ u_t(0) & = & f & \text{für } t = 0. \end{array} \tag{6.39}$$

Benutzt man Polarkoordinaten (r, φ), $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, für (x, y) sowie den Ansatz

$$u(t, r, \varphi) = T(t)\, R(r)\, \phi(\varphi),$$

erhält man aus (6.39) die Gleichung

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\phi''}{r^2 \varphi}.$$

Folglich existiert eine Konstante λ mit $T'' = -c^2 \lambda T$, ferner eine Konstante γ mit $\phi''/\phi = -\gamma$, so dass insgesamt die drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T'' + c^2 \lambda T = 0 \tag{6.40}$$

$$\phi'' + \gamma \phi = 0 \tag{6.41}$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \big(\lambda - \frac{\gamma}{r^2}\big) R = 0 \tag{6.42}$$

entstehen. Da $\phi(\varphi)$ 2π-periodisch ist, hat (6.41) wie in Beispiel 6.2 genau die Eigenwerte und –funktionen

$$\gamma_n = n^2, \quad \phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.43}$$

Damit wird (6.42) zum Randwertproblem

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \big(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\big) R = 0, \quad R(a) = 0, \quad R(0) \text{ endlich;} \tag{6.44}$$

die Bedingung $R(a) = 0$ ergibt sich aus der Randbedingung $u(t, \cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$, und die Bedingung „$R(0)$ endlich“ soll implizieren, dass u im Ursprung $(x, y) = (0, 0)$ definiert ist.

Die gewöhnliche Differentialgleichung (6.44) kann nicht explizit gelöst werden, hat jedoch für $r \to 0$ Ähnlichkeit mit der Eulerschen Differentialgleichung

$$rh'' + rh' - n^2 h = 0,$$

welche die linear unabhängigen Lösungen r^n und r^{-n} besitzt. Zur Vereinfachung von (6.44) führen wir die neue Variable $\rho = \sqrt{\lambda}\, r$ ein und betrachten statt $R(r)$ jetzt die Funktion $S(\rho) = R(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}})$. Wegen $R_r = \sqrt{\lambda}\, S_\rho$ und $R_{rr} = \lambda S_{\rho\rho}$ erhält (6.44) dann die Standardform

$$S_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\, S_\rho + \big(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\big) S = 0, \quad S = 0 \text{ für } \rho = a\sqrt{\lambda}, \quad S(0) \text{ endlich.} \tag{6.45}$$

Die Differentialgleichung in (6.45) heißt *Besselsche Differentialgleichung* und kann durch den Potenzreihenansatz

$$J_n(\rho) = \rho^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0,$$

gelöst werden. Mit der Normierung $a_0 = \frac{2^{-n}}{n!}$ liefert ein Koeffizientenvergleich die Lösung

$$J_n(\rho) = \rho^n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j\, 2^{-n-2j}}{j!(n+j)!}\, \rho^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \big(\frac{\rho}{2}\big)^{n+2j},$$

die *Besselfunktion der Ordnung* n. Die Funktionen J_n, $n \in \mathbb{N}_0$, haben die folgenden Eigenschaften:

$$J_n(\rho) \sim \frac{\rho^n}{n!2^n} \quad \text{für } \rho \to 0$$

$$J_n(\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\big(\rho - \frac{\pi}{4}\big) + O\big(\frac{1}{\rho}\big) \quad \text{für } \rho \to \infty \tag{6.46}$$

J_n hat unendlich viele einfache Nullstellen

$$0 < \lambda_{n1} < \lambda_{n2} < \lambda_{n3} < \dots \tag{6.47}$$

(die erste Eigenschaft ist trivial, die beiden anderen Eigenschaften können hier nicht bewiesen werden). Die Bedingung „$S(0)$ endlich" in (6.45) ist für $S(\rho) = J_n(\rho)$ erfüllt. Dagegen kann die Randbedingung $R(a) = S(a\sqrt{\lambda}) = J_n(a\sqrt{\lambda}) = 0$ nur erfüllt werden, wenn $a\sqrt{\lambda}$ mit einer Nullstelle λ_{nm}, $m \in \mathbb{N}$ von J_n übereinstimmt. Damit erhalten wir die Lösungen $R_{nm}(r) = J_n\big(\frac{\lambda_{nm}}{a}\, r\big)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, von (6.42). Schließlich muss in (6.40) $\lambda = (\lambda_{nm}/a)^2$ gesetzt werden, und die allgemeine Lösung lautet $T_{nm}(t) = C_{nm} \cos\big(\frac{c\lambda_{nm}}{a}\, t\big) + D_{nm} \sin\big(\frac{c\lambda_{nm}}{a}\, t\big)$. Fasst man alle Anteile $R(r)$, $T(t)$ und $\phi(\varphi)$ zusammen, erhält man die formale Lösung

$$\begin{aligned} u(t,r,\varphi) \;=\; & \sum_{m=1}^{\infty} J_0\big(\frac{\lambda_{0m} r}{a}\big) \Big(C_{0m} \cos\big(\frac{c\lambda_{0m}}{a}\, t\big) + D_{0m} \sin\big(\frac{c\lambda_{0m}}{a}\, t\big)\Big) \\ & + \sum_{m,n=1}^{\infty} J_n\big(\frac{\lambda_{nm} r}{a}\big) (A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi) \\ & \quad \times \Big(C_{nm} \cos\big(\frac{c\lambda_{nm}}{a}\, t\big) + D_{nm} \sin\big(\frac{c\lambda_{nm}}{a}\, t\big)\Big). \end{aligned} \tag{6.48}$$

Um die Koeffizienten $A_{nm}, \ldots, D_{nm}$ aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen, nehmen wir an, dass die obige Reihe gleichmäßig in $r \in [0, a]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ konvergiert, und benötigen, dass die beteiligten Eigenfunktionen orthogonal zueinander sind. Zur Vereinfachung sei im Folgenden

$$J_{nm}(r) = J_n\big(\frac{\lambda_{nm} r}{a}\big).$$

Lemma 6.9 (1) *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \neq k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\int_0^a J_{nm}(r)\, J_{nk}(r)\, r dr = 0\,. \tag{6.49}$$

(2) *Für festes $m \in \mathbb{N}$ und beliebige $n \neq \ell \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\int_\Omega J_{nm}(r) \cos n\varphi \cdot J_{\ell m}(r) \cos \ell\varphi \, d(x, y) = 0. \tag{6.50}$$

Die analoge Aussage gilt, wenn $\cos n\varphi$ und/oder $\cos \ell\varphi$ durch $\sin n\varphi$ und/oder $\sin \ell\varphi$ ersetzt wird.

Beweis Da (2) eine einfache Konsequenz der Orthogonalität der Funktionen $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ zu $\cos \ell\varphi$ und $\sin \ell\varphi$ auf $[0, 2\pi]$ ist, bleibt (1) zu beweisen. Wegen

$$\Big[\partial_r^2 + \frac{1}{r}\,\partial_r + \Big(\big(\frac{\lambda_{nm}}{a}\big)^2 - \frac{n^2}{r^2}\Big)\Big] J_{nm} = 0,$$

gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^a \Big[\partial_r^2 + \frac{1}{r}\,\partial_r + \Big(\big(\frac{\lambda_{nm}}{a}\big)^2 - \frac{n^2}{r^2}\Big)\Big]\, J_{nm} \cdot J_{nk}\, r dr \\
&= \int_0^a \big(-J'_{nm} J'_{nk}\, r - J'_{nm} J_{nk} + J'_{nm} J_{nk}\big) dr + J'_{nm} J_{nk}\, r\Big|_0^a \\
&\quad + \big(\frac{\lambda_{nm}}{a}\big)^2 \int_0^a J_{nm} J_{nk}\, r dr - \int_0^a \frac{n^2}{r^2} J_{nm} J_{nk}\, r dr \\
&= -\int_0^a \big(J'_{nm} J'_{nk} + \frac{n^2}{r^2}\, J_{nm} J_{nk}\big) r dr + \big(\frac{\lambda_{nm}}{a}\big)^2 \int_0^a J_{nm} J_{nk}\, r dr;
\end{aligned}$$

hierbei wurde partielle Integration sowie $J_{nk}(a) = 0$ benutzt. Ebenso gilt

$$0 = -\int_0^a \big(J'_{nk} J'_{nm} + \frac{n^2}{r^2}\, J_{nk} J_{nm}\big) r dr + \big(\frac{\lambda_{nk}}{a}\big)^2 \int_0^a J_{nn} J_{nm}\, r dr.$$

Subtrahiert man beide Gleichungen voneinander und berücksichtigt $0 < \lambda_{nm} \neq \lambda_{nk}$ für $m \neq k$, erhält man die gewünschte Orthogonalität von J_{nm} und J_{nk} bzgl. des Skalarprodukts

$$(u, v)_\Omega := \int_\Omega uv\, d(x, y).$$

Dieses Skalarprodukt stimmt für radialsymmetrische Funktionen u, v auf Ω mit $2\pi \int_0^a u(r)v(r)\, rdr$ überein. ■

Für $t = 0$ liefern (6.48) und (6.39) die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= u(0,r,\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} J_{0m}(r) C_{0m} \\ &\quad + \sum_{m,n=1}^{\infty} J_{nm}(r)(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi) C_{nm} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f = u_t(0,r,\varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} J_{0m}(r) D_{0m}\, \frac{c\lambda_{0m}}{a} \\ &\quad + \sum_{m,n=1}^{\infty} J_{nm}(r)(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi) D_{nm}\, \frac{c\lambda_{nm}}{a}\,. \end{aligned}$$

Dann folgt aus den Orthogonalitätsbedingungen von Lemma 6.9 sofort $C_{0m} = C_{nm}A_{nm} = C_{nm}B_{nm} = 0$,

$$\begin{aligned} \big(f, J_{NM}(r)\cos N\varphi\big)_\Omega &= \int_0^a J_{NM}^2(r) rdr \cdot \pi A_{NM} D_{NM}\, \frac{c\lambda_{NM}}{a}, \\ \big(f, J_{NM}(r)\sin N\varphi\big)_\Omega &= \int_0^a J_{NM}^2(r) rdr \cdot \pi B_{NM} D_{NM}\, \frac{c\lambda_{NM}}{a}, \end{aligned}$$

für $N, M \in \mathbb{N}$ sowie eine entsprechende Identität für D_{0m}. Mit der Wahl $C_{0m} = C_{nm} = 0$, $D_{nm} = 1$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ reduziert sich (6.48) auf die formale Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} u(t,r,\varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} J_{0m}(r) D_{0m} \sin\Big(\frac{c\lambda_{0m}}{a}\, t\Big) \\ &\quad + \sum_{m,n=1}^{\infty} J_{nm}(r)(A_{nm}\cos n\varphi + B_{nm}\sin n\varphi)\, \sin\Big(\frac{c\lambda_{nm}}{a}\, t\Big) \end{aligned}$$

mit den verallgemeinerten Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} D_{0m} &= \big(f, J_{0m}(r)\big)_\Omega\, \frac{a}{c\lambda_{0m}\pi} \Big(\int_0^a J_{0m}^2 rdr \Big)^{-1}, \quad m \in \mathbb{N}, \\ A_{nm} &= \big(f, J_{nm}(r)\cos n\varphi\big)_\Omega\, \frac{a}{c\lambda_{nm}\pi} \Big(\int_0^a J_{nm}^2 rdr \Big)^{-1}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \\ B_{nm} &= \big(f, J_{nm}(r)\sin n\varphi\big)_\Omega\, \frac{a}{c\lambda_{nm}\pi} \Big(\int_0^a J_{nm}^2 rdr \Big)^{-1}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$