5 Die Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$

5.1 Die Fourier-Transformation und Faltungsintegrale auf $L^p(\mathbb{R}^n)$

Definition 5.1 Sei $1 \le p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann ist

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) \;&=\; \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) : \ u \text{ ist „messbar“}, \\ &\qquad \|u\|_p := \Big(\textstyle\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} < \infty\Big\}. \end{aligned}$$

Für $p = \infty$ definiert man

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) \;&=\; \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) : \ u \text{ ist wesentlich beschränkt}, \\ &\qquad \|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty\}; \end{aligned}$$

dabei heißt u wesentlich beschränkt, falls es eine Nullmenge $N \subset \Omega$ gibt, so dass $|u|$ auf $\Omega \setminus N$ gleichmäßig beschränkt ist. Bei der Bestimmung des *wesentlichen Supremums* ess sup von $|u|$ werden Nullmengen $N \subset \Omega$ bei der Berechnung des Supremums von $|u|$ nicht berücksichtigt. Man beachte, dass die Norm $\|\cdot\|_\infty$ auch in der Form

$$\|u\|_\infty \;=\; \inf\{K \ge 0 : |u(x)| \le K \text{ „fast überall“}\}$$

geschrieben werden darf.

Satz 5.2 *Für jedes $p \in [1, \infty]$ und für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $L^p(\Omega)$ ein vollständiger, normierter Vektorraum. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung*

$$\boxed{\|u + v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p}$$

für alle $u, v \in L^p(\Omega)$.

Satz 5.3 *Sei $1 \le p \le \infty$, und sei $p' := \frac{p}{p-1}$ ($p' = 1$, falls $p = \infty$, bzw. $p' = \infty$, falls $p = 1$) der zu p konjugierte Exponent. Dann gilt für $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ stets $uv \in L^1(\Omega)$ und*

$$\boxed{\|u \cdot v\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_{p'}.} \quad \textit{(Hölder-Ungleichung)}$$

Satz 5.4 *Sei $p \in [1, \infty]$ und $u \in L^1(\mathbb{R}^n), v \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann konvergiert das sog.* Faltungsintegral

$$\boxed{u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y) v(y) dy}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und definiert eine Funktion $u * v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{\|u * v\|_p \le \|u\|_1 \|v\|_p.}$$

Korollar 5.5 *Das Faltungsprodukt $*$ aus Satz 5.4 hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) $u * v = v * u$ f.ü. (Kommutativität)
für alle $u \in L^1(\mathbb{R}^n), v \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$.

(2) $(u * v) * w = u * (v * w)$ (Assoziativität)
falls zwei der Funktionen u, v, w in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen und eine in $L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$, liegt.

(3) $(u + v) * w = u * w + v * w$ (Distributivgesetz)
für $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n), w \in L^p(\mathbb{R}^n)$ oder $u, v \in L^p(\mathbb{R}^n), w \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definition 5.6 *Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die Fourier-Transformierte $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ punktweise für $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert durch*

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx.}$$

Für eine Funktion $h = h(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die Fourier-Rücktransformierte $\mathcal{F}^{-1}h$ punktweise für $x \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\boxed{\check{h}(x) = \mathcal{F}^{-1}h(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+ix\cdot\xi} h(\xi) d\xi.}$$

Satz 5.7 (1) *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.*

(2) *Gilt neben $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sogar $|x|f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\hat{f}$ stetig partiell bzgl. ξ differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -i(\widehat{x_j f})(\xi), \quad 1 \leq j \leq n.$$

(3) *Gilt $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ sowie $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)^n$, so ist*

$$\boxed{\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi),} \quad 1 \leq j \leq n.$$

(4) *Analoge Aussagen gelten auch für die Fourier-Rücktransformation.*

Beispiel 5.8 Im $\mathbb{R}^1$ besitzt die L^1-Funktion $h(x) = e^{-x^2/2}$ die Fourier-Transformierte $\hat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$. Insbesondere ist $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}h = h$.

Satz 5.9 *Für beliebige Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\boxed{\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.}$$

Satz 5.10 *(Umkehrsatz) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} f = f} \quad f.ü.$$

Satz 5.11 *Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sowie*

$$\boxed{\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2;}$$

dabei wird die Integration von $\hat{f}$ über $\xi \in \mathbb{R}^n$ bzgl. $đ\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi$ genommen, d.h.

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx.$$

Bemerkung 5.12 Zu jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$, d.h.

$$\|f - f_k\|_2 \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Also gilt nach Satz 5.11

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_j\|_2 = \|f_k - f_j\|_2 \to 0 \text{ für } k, j \to \infty.$$

Die Folge $(\hat{f}_k) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ ist also eine Cauchy-Folge, und es gibt nach Satz 5.2 ein $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\hat{f}_k \to g \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ für } k \to \infty.$$

Deshalb definieren wir die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch $g = \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Satz 5.13 *Die in Bemerkung 5.12 durchgeführte Konstruktion gestattet eine Erweiterung der Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Die wieder mit $\mathcal{F}$ bezeichnete Abbildung*

$$\mathcal{F} = L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \hat{f},$$

hat die Eigenschaften:

(1) *$\mathcal{F}$ ist linear, stetig und bijektiv, $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(2) *Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\boxed{\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2} \quad \textit{(Satz von Plancherel)}$$

sowie die Formel von Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \cdot \widehat{\overline{g(\xi)}} đ\xi$$

mit $đ\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi$.

(3) *Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ lassen sich $\hat{f}$ aus f und f aus $\hat{f}$ als L^2-Grenzwerte wie folgt berechnen:*

$$\begin{aligned} \int_{B_R} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \quad &\to \quad \hat{f}(\xi) \quad \text{für } R \to \infty, \\ \int_{B_R} \hat{f}(\xi)e^{+ix\cdot\xi}đ\xi \quad &\to \quad f(x) \quad \text{für } R \to \infty \end{aligned}$$

mit $đ\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}d\xi$.

Korollar 5.14 (1) *Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\widehat{\nabla u}(\xi) = i\xi\hat{u}(\xi)$$

sowie $\xi\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\|\xi\hat{u}(\xi)\|_2 = \|\nabla u\|_2$.

(2) *Umgekehrt sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\xi\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt u partielle Ableitungen 1. Ordnung $\partial_j u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ im folgenden Sinne (sog.* schwache Ableitungen*):*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\,\partial_j\varphi\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j u \cdot \varphi\,dx$$

für alle reellwertigen Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis (2) Zu $\xi_j\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt es nach Satz 5.13(1) ein $v_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{v}_j = i\xi_j\hat{u}$. Dann gilt für alle reellwertigen Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 5.13 (2)

$$\begin{aligned} &\int u\partial_j\varphi\,dx = \int u\,\overline{\partial_j\varphi}\,dx = \int \hat{u}\,\overline{\widehat{\partial_j\varphi}}\,đ\xi \\ \underset{(1)}{=} &\int \hat{u}\,\overline{i\xi_j\hat{\varphi}}\,đ\xi = -\int i\xi_j\hat{u}\,\overline{\hat{\varphi}}\,đ\xi = -\int \hat{v}_j\,\overline{\hat{\varphi}}\,đ\xi \underset{(1)}{=} -\int v_j\varphi\,dx\,. \end{aligned}$$

Eine Funktion v_j mit dieser Eigenschaft ist eindeutig bestimmt. ∎

5.2 Der Wärmeleitungskern

Zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - k\,\Delta u &= 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(0) &= u_0 \quad \text{für } t = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

wird eine (formale) Fourier-Transformation bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$ durchgeführt. Aus (5.1) erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\hat{u}_t + k|\xi|^2\,\hat{u} = 0, \quad \hat{u}(0) = \hat{u}_0$$

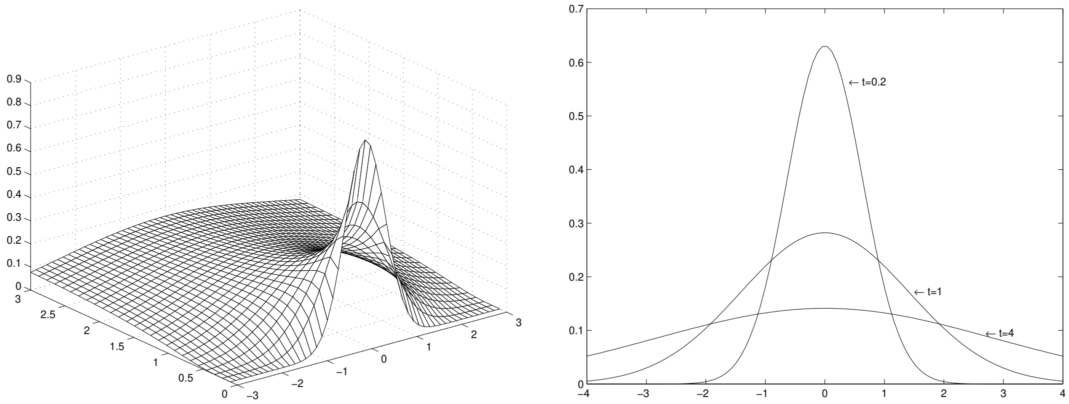

Abbildung 5.1: Der Wärmeleitungskern $E(t,x)$ im $\mathbb{R}^1$

bzgl. t mit Parameter $\xi \in \mathbb{R}^n$ und Anfangswert $\hat{u}_0(\xi)$. Die eindeutig bestimmte Lösung lautet

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-k|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi)\,,$$

also nach Satz 5.9

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi))(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t}) * u_0(x)\,. \tag{5.2}$$

Zur Berechnung von $\mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t})$ benutzen wir Beispiel 5.8 wie folgt: für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt punktweise

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(e^{-k|\xi|^2 t})(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}} \ldots \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_1 x_1} e^{-k\xi_1^2 t}\,d\xi_1\Big) \ldots e^{i\xi_n x_n} e^{-k\xi_n^2 t}\,d\xi_n \\ &= \mathcal{F}_1^{-1}\big(e^{-k\xi_1^2 t}\big)(x_1)\cdot\ldots\cdot\mathcal{F}_n^{-1}\big(e^{-k\xi_n^2 t}\big)(x_n) \end{aligned}$$

mit der Fourier-Rücktransformation $\mathcal{F}_j^{-1}, 1 \le j \le n$, über $\mathbb{R}^1$. Nach Beispiel 5.8 und einer Anwendung der Substitutionsregel ist z.B. für $j = 1$

$$\mathcal{F}_1^{-1}\big(e^{-k\xi_1^2 t}\big)(x_1) = \mathcal{F}_1^{-1}\Big(e^{-(\sqrt{2kt}\,\xi_1)^2/2}\Big)(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2kt}}\,e^{-(x_1/\sqrt{2kt})^2/2},$$

woraus schließlich

$$\mathcal{F}^{-1}\big(e^{-k|\xi|^2 t}\big)(x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}$$

folgt. Wir definieren jetzt den *Wärmeleitungskern*

$$\boxed{E(t,x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}\,.} \tag{5.3}$$

Damit erhält man die formale Lösung

$$\boxed{u(t,x) = E(t,\cdot) * u_0(x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\, u_0(y)\, dy} \tag{5.4}$$

von (5.1).

Satz 5.15 *Der Wärmeleitungskern $E(t,x)$ im $\mathbb{R}^n$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(1) *$E(t,x)$ ist unendlich oft stetig partiell differenzierbar in den Variablen $t > 0$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus ist E sogar reell analytisch in $t, x_1, \dots, x_n$, d.h., E läßt sich als $(n+1)$–fache konvergente Potenzreihe bzgl. $t, x_1, \dots, x_n$ mit beliebigem Entwicklungspunkt $t_0 > 0$, $x_{01}, \dots, x_{0n} \in \mathbb{R}$ schreiben*

(2) *$E(t,x) > 0$ für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$*

(3) *Für $t \to 0+$ gilt*

$$E(t,x) \to \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0\,. \end{cases}$$

(4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\, dx = 1$ *für alle $t > 0$.*

(5) *Bezüglich der Faltung in der Ortsvariablen x gilt*

$$\boxed{E(t,\cdot) * E(s,\cdot) = E(t+s,\cdot)} \quad \text{für alle } t, s > 0\,.$$

(6) *Für jedes $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\partial_t E = k \Delta E\,.$$

Beweis Die Eigenschaften (1) – (4) und (6) (bis auf die reelle Analytizität) sind trivial und ergeben sich aus der Definition. Die Normierungsbedingung (4) folgt auch aus der Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = \mathcal{F}\big(E(t,\cdot)\big)(\xi = 0) = e^{-k|\xi|^2 t}\big|_{\xi=0} = 1\,.$$

Die Faltungsidentität in (5) läßt sich explizit nachrechnen, folgt aber auch aus der Funktionalgleichung

$$e^{-k|\xi|^2 t}\, e^{-k|\xi|^2 s} = e^{-k|\xi|^2 (t+s)}$$

und der Formel $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}\,\hat{v}) = u * v$, s. Satz 5.9. ∎

5.3 Existenz von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Satz 5.16 *Sei $u_0 \in BC^0(\mathbb{R}^n) = C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, also ein stetiger beschränkter Anfangswert. Dann ist*

$$u(t,x) = E(t,\cdot) * u_0, \quad \text{kurz } u(t) = E(t)u_0\,,$$

eine unendlich oft stetig partiell differenzierbare und sogar reell-analytische Funktion auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, die das Anfangswertproblem (5.1) löst. Dabei gilt $u(0) = u_0$ im Sinne

$$u(t,x) \to u_0(x_0) \quad \text{für } (t,x) \to (0,x_0), \quad t > 0\,. \tag{5.5}$$

Beweis Wir beweisen, dass $u(t) = E(t)u_0$ nach x_1 partiell differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\, u(t,x) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\, E(t,\cdot)\Big) * u_0(x) \tag{5.6}$$

ist; analoge Ergebnisse gelten für $\partial_2, \dots, \partial_n$, für $\partial/\partial t$ und für partielle Ableitungen höherer Ordnung. Insbesondere folgt

$$(\partial_t - \Delta)u(t,x) = \big(\partial_t - \Delta_x E(t,\cdot)\big) * u_0 = 0$$

mit Hilfe von Satz 5.15(6). Zum Beweis von (5.6) betrachten wir der Einfachheit halber nur den eindimensionalen Fall, also $x = x_1$, und $k = 1$. Es sei

$$f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t},$$

so dass nach zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes für $h \neq 0$

$$\frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big) - f'(x) = f'(x+\theta h) - f'(x) = \theta h\, f''(x+\theta' h)$$

mit $0 < \theta,\, \theta' < 1$ gilt. Wegen $f''(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\big(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\big)e^{-x^2/4t}$ und der elementaren Ungleichung

$$\frac{x^2}{4t}\, e^{-x^2/4t} = 2\cdot\frac{x^2}{8t}\, e^{-x^2/8t}\cdot e^{-x^2/8t} \le C e^{-x^2/8t}\,,$$

die aus $ye^{-y} \le C$ für $y \ge 0$ folgt, genügt f'' für $|h| < 1$ der Abschätzung

$$\begin{aligned} |f''(x+\theta' h)| &\le \frac{C}{t^{3/2}}\, e^{-(x+\theta' h)^2/8t} \le \frac{C}{t^{3/2}}\, e^{-x^2/8t}\, e^{|h|\,|x|/4t} \\ &\le \frac{C}{t^{3/2}}\, e^{-x^2/8t}\, e^{x^2/16t}\, e^{4h^2/t} \le C(t) e^{-x^2/16t}\,; \end{aligned}$$

dabei wurde in der vorletzten Ungleichung $\frac{|h|\,|x|}{4t} \leq \frac{x^2}{16t} + \frac{h^2}{4t}$ ausgenutzt. Man beachte ferner, dass die Konstante $C(t)$ von θ', h und x unabhängig ist. Nun folgt für festes $t > 0$

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{h}\big(u(t,x+h)-u(t,x)\big) - \big(\frac{\partial}{\partial x}E(t,\cdot)\big) * u_0(x)\Big| \\
&\quad = \Big|\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{h}\big(f(x+h-y)-f(x-y)\big) - f'(x-y)\Big)\, u_0(y)\, dy\Big| \\
&\quad \leq C(t)\int_{\mathbb{R}} \theta|h| e^{-(x-y)^2/16t}|u_0(y)|\, dy \\
&\quad \leq |h| C(t)\|u_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/16t}\, dy \\
&\quad \to 0 \quad \text{für } h \to 0\,.
\end{aligned}$$

Also ist $u(t,x)$ bzgl. x differenzierbar, die Ableitung lautet $\frac{\partial}{\partial x}E(t,\cdot) * u_0(x)$. Aus der reellen Analytizität von E, *s.* Satz 5.15 (1), folgt – ohne Beweis (!) – die reelle Analytizität von $u(t,x)$.

Zum Beweis von (5.5) sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ gewählt. Da u_0 in x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{falls } |y - x_0| < 2\delta\,.$$

Für $x \in B_\delta(x_0)$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|u(t,x) - u_0(x_0)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x-y)\big(u_0(y)-u_0(x_0)\big)\, dy\Big| \\
&\leq \int_{|y-x|<\delta} E(t,x-y)\,|u_0(y)-u_0(x_0)|\, dy \\
&\quad + \int_{|y-x|>\delta} E(t,x-y)|u_0(y)-u_0(x_0)|\, dy\,,
\end{aligned}$$

da nach Satz 5.15 $E(t,\cdot) > 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\, dx = 1$ für ale $t > 0$ gilt. Aus $x \in B_\delta(x_0)$ und $y \in B_\delta(x)$ folgt $|y - x_0| < 2\delta$, so dass das erste Integral auf der rechten Seite durch

$$\int_{|y-x|<\delta} E(t,x-y)\,\frac{\varepsilon}{2}\, dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

beschränkt ist. Das zweite Integral wird durch

$$\int_{|y-x|>\delta} E(t,x-y)\, 2\|u_0\|_\infty\, dy = \frac{2\|u_0\|_\infty}{\pi^{n/2}} \int_{|z|\geq \frac{\delta}{\sqrt{4kt}}} e^{-|z|^2} dz$$

abgeschätzt; es ist also kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, falls $0 < t < \delta' = \delta'(\delta, u_0)$ ist. Insgesamt folgt

$$|u(t,x) - u_0(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $|x - x_0| < \delta = \delta(\varepsilon)$ und $0 < t < \delta'$. ∎

Korollar 5.17 (1) *In Satz 5.16 ist die Konvergenz* $u(t,x) \to u_0(x_0)$ *sogar gleichmäßig bezüglich* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *falls* $u \in BUC(\mathbb{R}^n)$ *gilt, d.h., falls* $u \in BC(\mathbb{R}^n)$ *sogar gleichmäßig stetig ist.*

(2) *Satz 5.16 gilt sogar, wenn* $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$ *der Wachstumsabschätzung*

$$|u_0(x)| \leq ce^{M|x|}, \quad x > 0,\ M \in \mathbb{R},$$

genügt.

Beweis

(1) folgt aus einer Inspektion des 2. Beweisteils von Satz 5.16.

(2) Wegen

$$|u_0(y)| \leq ce^{M|y|} \leq ce^{M|x|}\, e^{M|y-x|} \leq C_\varepsilon(x)\, e^{\varepsilon|y-x|^2}$$

für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ bleibt der Beweis von Satz 5.16 auch bei der Wachstumsabschätzung aus (2) gültig. ■

Bemerkung 5.18 Die Lösung $u(t) = E(t)u_0$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) Wegen $E(t,\cdot) > 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = 1$ gilt das sog. *schwache Maximum- und Minimumprinzip*

$$\inf u_0 \leq u(t,x) \leq \sup u_0 \quad \text{auf } [0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Während für einen konstanten Anfangswert u_0 die Lösung $u \equiv u_0$ lautet, gilt für jeden nichtkonstanten Anfangswert u_0 nach Satz 5.15 (2), (4) sogar

$$\inf u_0 < u(t,x) < \sup u_0 \quad \text{auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Falls umgekehrt $u(t,x) = \inf u_0$ oder $u(t,x) = \sup u_0$ in einem Punkt (t,x) mit $t > 0$ gilt, ist $u = u_0$ konstant *(starkes Maximum- und Minimumprinzip).*

(2) Für alle $t > 0$ ist $u(t,x)$ eine unendlich oft stetig partiell differenzierbare Funktion bzgl. x, auch wenn u_0 nur stetig ist oder sogar nur in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt. Im Fall $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$u(t,x) \to u_0(x_0) \quad \text{für } t \to 0+,\ x \to x_0$$

nur, falls die Punktauswertung $u_0(x_0)$ sinnvoll ist und u_0 in einer Umgebung von x_0 f.ü. mit einer stetigen Funktion übereinstimmt. Andernfalls wird der Anfangswert $u(0) = u_0$ in einer *schwachen Form* angenommen: für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,\varphi(x)\,dx = \int u_0(x)\,\varphi(t,x)\,dx \to \int u_0(x)\,\varphi(x)\,dx$$

für $t \to 0+$, wobei $\varphi(t,x) = E(t,\cdot) * \varphi(x)$ die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (5.1) mit Anfangswert φ bezeichnet.

(3) Der Lösungsoperator $u_0 \mapsto E(t)u_0$ hat also eine stark regularisierende Wirkung; nicht differenzierbare Stellen von u_0 und sogar Unstetigkeiten von u_0 werden für jedes noch so kleine $t > 0$ weggeglättet!

(4) Wegen $E(t,x) > 0$ für alle $t > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ beeinflussen die Funktionswerte von u_0 in $B_\varepsilon(x_0)$ die Lösung $u(t,x)$ für jedes $t > 0$ und in jedem $x \in \mathbb{R}^n$. Im Gegensatz zu den bei der Wellengleichung besprochenen Phänomenen besitzen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung eine *unendlich große Ausbreitungsgeschwindigkeit*. Insofern ist die Wärmeleitungsgleichung kein realistisches Modell der Wärmeausbreitung.

(5) Der Lösungsoperator

$$E(t) : BC^0(\mathbb{R}^n) \to BC^0(\mathbb{R}^n), \quad u_0 \mapsto E(t)u_0\,,$$

ist für jedes $t > 0$ ein linearer, stetiger Operator, wenn $BC^0(\mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen wird: für alle $u_0, v_0 \in BC^0(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|E(t)u_0 - E(t)v_0\|_\infty = \|E(t)(u_0 - v_0)\|_\infty \le \|u_0 - v_0\|_\infty\,.$$

Ferner besitzt $E(\cdot)$ wegen $E(t,\cdot) * E(s,\cdot) = E(t+s,\cdot)$ die *Halbgruppeneigenschaft*

$$\begin{aligned} E(t)\,E(s) &= E(t+s) \quad \text{für alle } t, s \ge 0\,, \\ E(0) &= id\,. \end{aligned}$$

Auf dem mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehenen Raum $BUC(\mathbb{R}^n)$ ist $E(\cdot)$ nach Korollar 5.17 (1) sogar im folgenden Sinne *stark stetig*:

$$\begin{aligned} E(t)u_0 &\to E(t_0)u_0 \qquad \text{für } t \to t_0,\ t_0 > 0\,, \\ E(t)u_0 &\to u_0 \qquad \text{für } t \to 0+\ . \end{aligned}$$

Unter Vorwegnahme der Eindeutigkeit der Lösung, s. Satz 5.23, stellt die Wärmeleitungsgleichung also ein wohlgestelltes Problem im Raum $BUC(\mathbb{R}^n)$ dar.

Das Anfangswertproblem (5.1) kann mit Hilfe der Formel $u(t,x) = E(t,\cdot) * u_0(x) = E(t)u_0$ und von Satz 5.4 auch für Anfangswerte $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ betrachtet werden.

Satz 5.19 *Sei ein Anfangswert $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p < \infty$, gegeben. Dann ist $u(t) = E(t)u_0$ eine unendlich oft bzgl. $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktion, die das Anfangswertproblem (7.1) im Sinne*

$$u(t,\cdot) \to u_0 \quad in\ \ L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für}\ \ t \to 0+ \tag{5.7}$$

löst. Ferner gilt

$$u(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \|u(t,\cdot)\|_p \le \|u_0\|_p \quad \text{für alle } t > 0\,. \tag{5.8}$$

Beweis Aus $0 < E(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)dx = 1$ folgen mit Satz 5.4 die Aussage $u(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und die Abschätzung

$$\|u(t,\cdot)\|_p = \|E(t,\cdot) * u_0\|_p \leq \|E(t,\cdot)\|_1 \, \|u_0\|_p = \|u_0\|_p \, .$$

Zum Beweis der Differenzierbarkeit betrachten wir exemplarisch die Ableitung $\partial_1 = \partial/\partial x_1$ und nutzen aus, dass u_0 beliebig gut in der L^p-Norm durch $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen approximiert werden kann: zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|u_0 - \varphi_k\|_p < \frac{1}{k} \, . \tag{5.9}$$

Nach Satz 5.16 ist die Lösung $E(t)\varphi_k$ unendlich oft differenzierbar in $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt z.B.

$$\partial_1\big(E(t)\varphi_k\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1} E(t, x-y)\, \varphi_k(y)\, dy \, .$$

Dabei ist

$$\partial_{x_1} E(t, x-y) = \frac{-(x_1 - y_1)/2kt}{(4\pi kt)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}$$

und genügt der Abschätzung

$$|\partial_{x_1} E(t, x-y)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \frac{1}{(4\pi kt)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x-y|^2}{8kt}} \, ,$$

da $\frac{|x_1-y_1|}{\sqrt{t}}\, e^{-|x-y|^2/8kt}$ gleichmäßig beschränkt ist. Insbesondere gilt mit $p' = \frac{p}{p-1}$

$$\|\partial_{x_1} E(t,\cdot)\|_{p'} \leq C(t)$$

mit einer Funktion $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (man kann $C(t) = c_0 t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2p}}$ wählen). Analog erhält man

$$\|E(t,\cdot)\|_{p'} + \|\partial_t E(t,\cdot)\|_{p'} + \|\nabla^2 E(t,\cdot)\|_{p'} \leq C(t) \, .$$

Mit der Hölder-Ungleichung (Satz 5.3) folgt

$$\begin{aligned} |E(t)\, u_0(x) - E(t)\, \varphi_k(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} E(t, x-y)\, |u_0(y) - \varphi_k(y)|\, dy \\ &\leq \|E(t,\cdot)\|_{p'}\, \|u_0 - \varphi_k\|_p \\ &\leq C(t)\, \frac{1}{k} \, , \end{aligned}$$

also die *gleichmäßige* Konvergenz der Funktionenfolge $\big(E(t)\varphi_k\big)_k$ gegen $E(t)u_0$; insbesondere ist $E(t)u_0$ für jedes $t > 0$ stetig. Da $\partial_1\big(E(t)u_0\big) = \big(\partial_1 E(t,\cdot)\big) * u_0$ gelten soll, leiten wir zuerst die Abschätzung

$$|(\partial_1 E(t,\cdot) * u_0 - \partial_1 E(t,\cdot) * \varphi_k\big)(x)| \leq C(t)\, \frac{1}{k}$$

analog her. Die Funktionenfolge der Ableitungen $\big(\partial_1 E(t,\cdot) * \varphi_k\big)_k = \partial_1\big(E(t)\varphi_k\big)_k$ konvergiert also gleichmäßig gegen die Funktion $\partial_1 E(t,\cdot) * u_0$. Daraus folgt mit Standardargumenten der Analysis, dass $E(t)u_0$ partiell nach x_1 differenzierbar ist, und dass

$$\partial_1\big(E(t,\cdot) * u_0\big) = \partial_1 E(t,\cdot) * u_0$$

gilt. Analoge Aussagen gelten für $\partial_2, \dots, \partial_n$ und für die Zeitableitung ∂_t. Da diese ersten Ableitungen stetig sind, ist $u(t,x)$ sogar stetig partiell differenzierbar. Höhere Ableitungen werden analog behandelt.

Zum Beweis der Aussage (5.7) benutzen wir wieder (5.9) und folgern mit (5.8) und der Dreiecksungleichung für die L^p-Norm, s. Satz 5.2,

$$\begin{aligned}\|E(t)u_0 - u_0\|_p &\le \|E(t)(u_0-\varphi_k)\|_p + \|E(t)\varphi_k - \varphi_k\|_p + \|\varphi_k - u_0\|_p \\ &\le 2\|u_0-\varphi_k\|_p + \|E(t)\varphi_k - \varphi_k\|_p \\ &\le \frac{2}{k} + \|E(t)\varphi_k - \varphi_k\|_p\,.\end{aligned}$$

Wählt man zu $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{4}{\varepsilon}$, bleibt für $\varphi = \varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|E(t)\varphi - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } 0 < t < \delta' \tag{5.10}$$

für ein geeignetes $\delta' > 0$ zu zeigen. Dazu benutzen wir wieder Satz 5.15(2), (4) und schätzen mit der Hölder-Ungleichung wie folgt ab:

$$\begin{aligned}\|E(t)\varphi - \varphi\|_p^p &\le \int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} E(t,y)\,|\varphi(x-y)-\varphi(x)|dy\Big)^p dx \\ &= \int\Big(\int \underbrace{E(t,y)^{1/p'}}_{p'}\ \underbrace{E(t,y)^{1/p}\,|\varphi(x-y)-\varphi(x)|}_{p}\,dy\Big)^p dx \\ &\le \int\Big(\underbrace{\Big(\int E(t,y)dy\Big)^{p/p'}}_{=1}\int E(t,y)\,|\varphi(x-y)-\varphi(x)|^p dy\Big)dx \\ &= \int E(t,y)\Big(\int |\varphi(x-y)-\varphi(x)|^p dx\Big)dy\,.\end{aligned}$$

Das letzte Integral über $y \in \mathbb{R}^n$ wird aufgespalten in die Anteile über $y \in B_\delta$ und über $y \notin B_\delta$ mit einem geeigneten $\delta > 0$. Da $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ einen kompakten Träger hat und folglich gleichmäßig stetig ist, findet man zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\int |\varphi(x-y)-\varphi(x)|^p\,dx < \Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p \quad \text{für alle } y \in B_\delta\,.$$

Für den Anteil $y \notin B_\delta$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{|y|>\delta} E(t,y)\,\|\varphi(\cdot - y) - \varphi\|_p^p\,dy &\le (2\|\varphi\|_p)^p \int_{|y|>\delta} E(t,y)\,dy \\ &= \frac{(2\|\varphi\|_p)^p}{\pi^{n/2}}\int_{|z|>\frac{\delta}{4kt}} e^{-|z|^2}dz \le \Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p,\end{aligned}$$

falls $0 < t < \delta'$ mit einem geeigneten $\delta' > 0$ erfüllt ist. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|E(t)\varphi - \varphi\|_p^p &\leq \Big(\int_{y \in B_\delta} + \int_{y \notin B_\delta} \Big) E(t,y) \Big(\int |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p dx \Big)\, dy \\
&\leq \Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p \int_{y \in B_\delta} E(t,y)\, dy + \Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p \\
&\leq 2\Big(\frac{\varepsilon}{4}\Big)^p
\end{aligned}$$

und folglich (5.10). Damit ist (5.7) bewiesen. ■

Als Beispiel einer *inhomogenen Wärmeleitungsgleichung* betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
u_t - k\Delta u &= f(t,x) \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\
u(0) &= 0\,.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Nach Duhamel's Prinzip, vgl. §3.4 zur Wellengleichung, kann man die Lösung in der Form $u(t,\cdot) = \int_0^t U(t,s,\cdot)ds$ gewinnen, wobei $U(t,s,\cdot)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$U_t - k\Delta U = 0, \quad U(s,s,\cdot) = f(s,\cdot)$$

löst. Nach Satz 5.16 oder Satz 5.19 ist

$$U(t,s,\cdot) = E(t-s)f(s,\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} E(t-s,\, x-y)\, f(s,y)\, dy$$

eine Lösung, woraus

$$u(t,x) = \int_0^t E(t-s,\cdot) * f(s,\cdot)(x)\, ds \tag{5.12}$$

folgt. Eine Rechnung zeigt sofort, dass u (5.11) löst. Ein Problem entsteht jedoch z.B. bei der Zeitableitung

$$\int_0^t \partial_t E(t-s,\cdot) * f(s,\cdot)(x)\, ds \approx \int_0^t \frac{1}{t-s}\,(\ldots)\, ds\,,$$

welche ein singuläres Integral liefert. Unter geeigneten Voraussetzungen an f erhält man den folgenden Satz, den wir nicht beweisen wollen.

Satz 5.20 *Sei $f \in BC(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n)$ lokal Hölder-stetig bzgl. x, d.h., es gibt ein $\delta > 0$ und zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ ein $c = c(K)$ mit*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq c\,|x-y|^\delta \quad \textit{für alle } x,y \in K \textit{ und } t \geq 0\,.$$

Dann löst u aus (5.12) die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - k\Delta u = f \quad \textit{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,\ u(0) = 0\,.$$

5.4 Das Maximumprinzip und die Eindeutigkeit von Lösungen

Satz 5.21 (Schwaches Maximumprinzip) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, sei $T > 0$, $\Omega_T = (0,T) \times \Omega$ und sei*

$$u \in C^0(\overline{\Omega_T}) \quad \textit{mit} \quad u_t \in C^0(\Omega_T),\ \nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$$

gegeben ($\nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$ bedeutet $\partial_i \partial_j u \in C^0(\Omega_T)$ für alle $1 \le i,\ j \le n$). Erfüllt u die Ungleichung

$$u_t - k\Delta u \le 0 \quad \textit{in } \Omega_T\,,$$

gilt

$$\boxed{\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u\,,} \tag{5.13}$$

wobei

$$\partial_p \Omega_T = \big\{(t,x) \in \overline{\Omega_T} : t = 0 \quad \textit{oder} \quad x \in \partial\Omega\big\} = (\{0\} \times \overline{\Omega}) \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$$

den parabolischen Rand *von Ω_T bezeichnet.*

Beweis Im ersten Teil des Beweises gelte sogar

$$u_t - k\Delta u < 0 \quad \text{in } \Omega_T\,.$$

Dann nimmt u für jedes $\varepsilon \in (0,T)$ sein Maximum in $\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ in einem Punkt $(t,x) \in \overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ an. Falls (t,x) ein innerer Punkt von $\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}$ wäre, gilt in $(t,x) \in \Omega_{T-\varepsilon}$

$$u_t(t,x) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta u(t,x) \le 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $(u_t - k\Delta u)(t,x) < 0$. Wäre $t = T - \varepsilon$, würde $u_t(t,x) \ge 0$ und wie zuvor $\Delta u(t,x) \le 0$ gelten, woraus wieder ein Widerspruch zu $(u_t - k\Delta u)(t,x) < 0$ folgen würde. Also liegt (t,x) auf dem parabolischen Rand, und es gilt

$$\max_{\overline{\Omega_{T-\varepsilon}}} u = \max_{\partial_p \Omega_{T-\varepsilon}} u \le \max_{\partial_p \Omega_T} u \quad \text{für alle } \varepsilon \in (0,T)\,.$$

Da u stetig auf $\overline{\Omega_T}$ ist, folgt für $\varepsilon \to 0+$ die Behauptung.

Nun gelte $u_t - k\Delta u \le 0$ in Ω_T. Statt u betrachte man die Funktion

$$v = u - \varepsilon t, \quad \varepsilon > 0,$$

für die

$$v_t - k\Delta v = u_t - k\Delta u - \varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega_T$$

gilt. Nach dem ersten Teil des Beweises folgt

$$\max_{\overline{\Omega_T}} (u - \varepsilon t) = \max_{\partial_p \Omega_T} (u - \varepsilon t) \le \max_{\partial_p \Omega_T} u\,.$$

Im Grenzwert $\varepsilon \to 0+$ erhält man die Behauptung. ∎

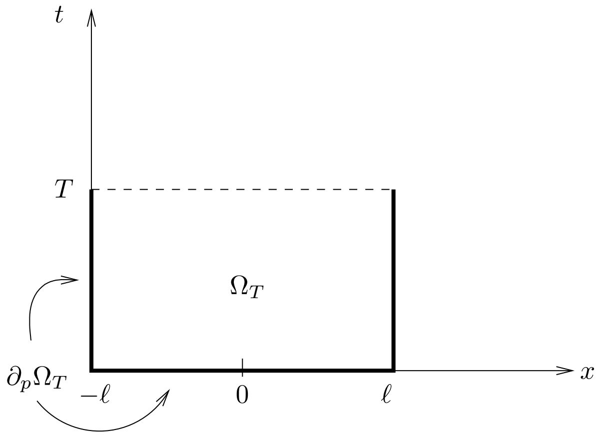

Abbildung 5.2: Der parabolische Rand $\partial_p\Omega_T$ für $\Omega = (_\ell, \ell) \subset \mathbb{R}^1$

Korollar 5.22 (A priori-Abschätzungen und Eindeutigkeit in beschränkten Gebieten) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und sei $u \in C^0(\overline{\Omega_T})$ mit $\partial_t u$, $\nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$ eine Lösung des Anfangsrandwertproblems*

$$\begin{aligned} u_t - k\Delta u &= f && \textit{in } \Omega_T \\ u(0) &= u_0 && \textit{für } t = 0 \\ u &= g && \textit{auf } (0,T) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $f \in C^0(\overline{\Omega_T})$, $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^0([0,T] \times \partial\Omega)$. Dann gilt die a priori-Abschätzung

$$\|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|g\|_\infty + T\|f\|_\infty\,. \tag{5.14}$$

Insbesondere ist u eindeutig durch die Daten f, u_0 und g bestimmt.

Beweis Die Funktion $w_\pm = \pm u - t\|f\|_\infty$ genügt den Voraussetzungen von Satz 5.21; insbesondere gilt

$$(w_\pm)_t - k\Delta w_\pm = \pm f - \|f\|_\infty \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T\,.$$

Also liefert Satz 5.21 die Abschätzung

$$(\pm u - t\|f\|_\infty)(t,x) \leq \|u_0\|_\infty + \|g\|_\infty$$

und damit (5.14). Auf Grund der Linearität des Problems reicht es, zum Beweis der Eindeutigkeit den Fall $f = 0$, $u_0 = 0$, $g = 0$ zu betrachten. In diesem Fall liefert (5.14) jedoch sofort die Eindeutigkeit $u = 0$. ■

Das schwache Maximumprinzip (Satz 5.21) führt in Korollar 5.22 zur Eindeutigkeitsaussage für die Wärmeleitungslgleichung in beschränkten Gebieten. Zusammen mit einer weitern Bedingung, einer Wachstumsabschätzung für $|x| \to \infty$, werden wir daraus die Eindeutigkeit für $\Omega = \mathbb{R}^n$ ableiten.

Satz 5.23 (Schwaches Maximumprinzip und Eindeutigkeit für $\Omega = \mathbb{R}^n$) *Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und sei $u \in C^0(\overline{\Omega_T})$ mit u_t, $\nabla^2 u \in C^0(\Omega_T)$ und*

$$u_t - k\Delta u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$$

gegeben. Ferner gelte die bzgl. $t \in [0,T)$ gleichmäßige Abschätzung

$$u(t,x) \leq Me^{a|x|^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \tag{5.15}$$

mit Konstanten $M, a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\boxed{\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Omega} u(0,\cdot)\,.} \tag{5.16}$$

Insbesondere ist eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^n$ innerhalb der Funktionenklasse

$$C^0_{M,a}(\overline{\Omega_T}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega_T}) : \quad \text{es gibt } M, a \in \mathbb{R} : \ |u(t,x)| \leq Me^{a|x|^2} \ \text{in } \mathbb{R}^n\}$$

eindeutig.

Beweis Um in (5.15) mit exponentiell anwachsenden Termen ($a > 0$) arbeiten zu können, wird die Funktion

$$\tilde{E}(t,x) = \frac{1}{\big(4\pi k(2T-t)\big)^{n/2}} \exp\Big(+\frac{|x|^2}{4k(2T-t)}\Big)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < 2T$, benutzt. Da $\tilde{E}(t,x_1,\dots,x_n) = E(2T-t, ix_1,\dots,ix_n)$ gilt, erkennt man $\tilde{E}$ sofort als Lösung der Wärmeleitungsgleichung in $(0,2T)$. Zur Anwendung von Satz 5.21 betrachten wir für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ die Kugel $G = B_\rho(y)$, $\rho > |y| > 0$, sowie im Raum-Zeit-Zylinder $G_T = (0,T) \times G$ die Funktion

$$v_\mu(t,x) = u(t,x) - \mu\tilde{E}(t,x) \quad \text{mit } \mu > 0\,.$$

Da $(\partial_t - k\Delta)v_\mu \leq 0$ in G_T gilt, liefert Satz 5.21 die Aussage

$$\max_{\overline{G_T}} v_\mu = \max_{\partial_p G_T} v_\mu\,.$$

Dabei gelten für v_μ auf $\partial_p G_T$ die Ungleichungen

$$v_\mu(0,x) \leq u(0,x) \quad \text{für } x \in G$$

sowie für $x \in \partial G$, $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned} v_\mu(t,x) &\leq Me^{a|x|^2} - \frac{\mu}{\big(4\pi k(2T-t)\big)^{n/2}} \exp\frac{|x|^2}{4k(2T-t)} \\ &\leq Me^{a(|y|+\rho)^2} - \frac{\mu}{(8\pi kT)^{n/2}} \exp\frac{(\rho-|y|)^2}{8kT}\,. \end{aligned}$$